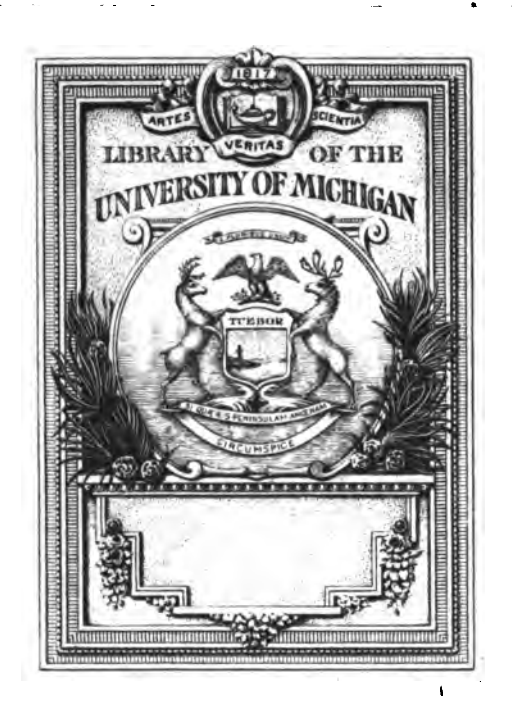
1,50


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

Lehrbuch der Arithmetik und der Anfangsgründe der Algebra,

für

Gymnasien und höhere Lehranstalten

von

J. C. H. Ludowieg,

Artillerie-Capitain a. D., Oberlehrer der Mathematik und Physik an dem Gymnasium zu S

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Hannover, 1835.

Im Verlage der Hahnschen Hof-Buchhandlung.

Seiner Excellenz

dem Königlich Großbritannisch Hannoverschen

Herrn General-Lieutenant Röttiger,

Director des Armee-Materials, Commandeur des Guelphen-Ordens 2c. 2c. 2c.

Eurer Excellenz

wage ich dies Buch als einen Beweis meiner innigen Verehrung zuzueignen.

Meine Anstellung als Lehrer der Mathematik an der unter Ihrer Direction gestandenen Militair-Schule, wodurch ich die Gelegenheit erhielt, mich dieser Wissenschaft mehr zu widmen als sonst meine damaligen Dienst-Verhältnisse gestattet haben würden, verdanke ich Eurer Excellenz hohen Anordnung.

Möchten Sie es gütig aufnehmen, wenn ich den tiefgefühlten Dank hier öffentlich ausspreche, den ich Ihnen in so vieler Hinsicht schuldig bin! Unvergeßlich wird mir stets die Zeit bleiben, in der ich dem Regimente angehörte, das Eure Excellenz zum Ruhme führten, das Ihr hochverdienstvolles Commando beglückte, worin sich die Güte, welche die Herzen der Untergebenen

gewinnt, mit der festen Gerechtigkeit vereinte, welche die Achtung der Gesetze und der Disciplin aufrecht hält.

Im Wechsel der Dinge des Glücks beraubt, unter Ihrer unmittelbaren Leitung für Beruf und Wissenschaft zu wirken, darf ich doch die zuversichtsvolle Hoffnung hegen, daß Eurer Excellenz unschätzbares Wohlwollen für mich nicht aufhören werde!

Mit unbegrenzter Hochachtung verharre ich

Eurer Excellenz

Hannover
den 13. August 1835.

gehorsamster
H. Ludowieg.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Der Zweck, dieses Lehrbuch meinem Unterrichte an der vormaligen hiesigen Militair-Schule als Leitfaden zum Grunde zu legen, veranlaßte die erste Herausgabe desselben. Seitdem ist zwar jener Schule eine andere Organisation, und mir ein anderer Wirkungskreis geworden; doch muß es mir erfreulich seyn, daß sowohl dieses, als mein Lehrbuch der Geometrie fortwährend in unsern dermaligen Militair-Bildungsanstalten, wie auch in mehreren andern Lehr-Instituten des In- und Auslandes, als Leitfaden gebraucht werden. Die erste Auflage der Arithmetik ist auf die Weise früher vergriffen, als ich erwartet hätte. —

Bei einer Revision derselben zur vorliegenden zweiten Auflage bin ich bemüht gewesen, einige Lehren genauer zu begründen, andere weiter auszuführen; und hoffe durch die daher entstandenen Zusätze das Buch verbessert zu haben.

Die Anordnung des Ganzen ist im Allgemeinen die der ersten Ausgabe geblieben. Wie in dieser bin ich in der Darstellung der Grundoperationen der Arithmetik und überhaupt in dem wesentlichen Zusammenhange ihres Inhalts „Thibaut's Grundriß der reinen Mathematik" gefolgt. — Bei dem Streben, die Wissenschaft im Geiste Thibaut's vorzutragen, habe ich jedoch nicht eine bloße Nachahmung desselben versucht, welches wohl die günstige Aufnahme des Buchs darzuthun scheint, die ihm bisher zu Theil wurde.

Die Theorie der Kettenbrüche, nebst deren vorzüglichsten Anwendungen in der Arithmetik und niedern Algebra, die Auflösung unbestimmter Gleichungen des ersten Grades und Aufgaben, die auf solche führen, sind dieser Ausgabe neu hinzugekommen.

Den Abschnitt „von den Proportionen" habe ich an vielen Stellen abgekürzt. Indessen kann ich der Meinung einiger Mathematiker: daß eine vollständige Abhandlung der Proportionen überflüssig sey, nicht beitreten, sondern glaube, daß man stets darauf zurückgeführt seyn wird, die hier davon aufgenommenen Sätze — wenn auch in anderer Form — vorzutragen, um sich in der Geometrie und angewandten Mathematik, so wie in einer wissenschaftlichen Darstellung des gemeinen Rechnens darauf beziehen zu können.

Es wird kaum nöthig seyn zu erwähnen, daß der Lehrer die in dem letzten Abschnitte des Buchs zusammengestellten Anwendungen gewisser Theorien auf practische Rechnungsarten, theilweise schon bei dem Vortrage früherer Capitel, je nach dem Bedarfe der Schüler, benutzen wird.

Schließlich fühle ich mich gedrungen, den verehrten Herrn Recensenten der ersten Ausgabe „in der allgemeinen Schulzeitung 1828, Abthl. I. Nr. 98 und in den Jahrbüchern der Philologie und Pädagogik 1830, 3ter Band

4tes Heft" meine große Dankbarkeit zu bezeugen, sowohl für die nachsichtige Beurtheilung meiner Arbeit, als auch für die treffenden Bemerkungen, wodurch sie mich auf verschiedene Verbesserungen derselben aufmerksam machten.

Hannover im August 1835.

H. Ludowieg.

Inhalt.

Drittes Capitel.

Die vier Species in ganzen, positiven und negativen Zahlen.

(§. 22. — §. 79.)

Viertes Capitel.

Eigenschaften der ganzen Zahlen hinsichtlich ihrer Theiler, und dahin gehörige Aufgaben.

(§. 80. — §. 93.)

Seite

Fünftes Capitel.

Von den Rechnungsarten mit Brüchen.

(§. 94. — §. 125.)

Sechstes Capitel.

Von den Decimalbrüchen.

(§. 126. — §. 144.)

Seite

Siebentes Capitel.

Von der Auflösung einfacher Gleichungen mit einer und mit mehreren unbekannten Größen.

(§. 145. — §. 175.)

Zweiter Abschnitt.

Von den Potenzen und damit in Verbindung stehenden Rechnungsarten.

Erstes Capitel.

Erklärung von Potenz einer Zahl, und der darauf begründeten Operationen.

(§. 176. — §. 192.)

Zweites Capitel.

Von der Erhebung zum Quadrate und der Ausziehung der Quadratwurzel.

(§. 193. — §. 230.)

Seite

Drittes Capitel.

Von den Gleichungen des zweiten Grades und ihrer Auflösung.

(§. 231. — §. 255.)

Viertes Capitel.

Von der Erhebung zum Cubus und der Ausziehung der Cubikwurzel.

(§. 256. — §. 284.)

Fünftes Capitel.

Von der Erhebung zur Potenz und Ausziehung der Wurzeln im Allgemeinen.

(§. 285. — §. 302.)

Sechstes Capitel.

Von den Rechnungsarten mit Potenzen.

(§. 303. — §. 320.)

Siebentes Capitel.

Von den Rechnungsarten mit Wurzelgrößen.

(§. 321. — §. 352.)

Achtes Capitel.

Von dem Logarithmen.

(§. 353. — §. 382.)

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

Erstes Capitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

(§. 383. — §. 421.)

Zweites Capitel.

Von den arithmetischen und geometrischen Progressionen.

(§. 422. — §. 443.)

Vierter Abschnitt.

Von den Kettenbrüchen und den unbestimmten Gleichungen des ersten Grades.

Erstes Capitel.

Von den Kettenbrüchen.

(§. 444. — §. 463.)

Zweites Capitel.

Von der Auflösung unbestimmter Gleichungen des ersten Grades.

(§. 464. — §. 474.)

Fünfter Abschnitt.

Anwendung der Gleichungen und Proportionen auf practische Rechnungsarten.

Erstes Capitel.

Von der Auflösung der Aufgaben vermittelst Gleichungen.

(§. 475. — §. 485.)

Zweites Capitel.

Anwendung der geometrischen Proportionen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

(§. 486. — §. 502.)

Drittes Capitel.

Von der Zinsen-Berechnung.

(§. 503. — §. 515.)

Einleitung.

§. 1.

Die Mathematik ist die Wissenschaft, welche den Zusammenhang und die gegenseitige Beziehung aller Arten von Größen untersucht, und aus der Verbindung bekannter Größen mit unbekannten, die letztern zu bestimmen lehrt. Sie zerfällt in zwei große Gebiete:

reine (theoretische) und
angewandte Mathematik.

Die reine Mathematik beschäftigt sich mit Größen, die man, ohne alle Rücksicht auf ihre übrigen Eigenschaften, nur auf ihre Form, d. h. auf die Art ihrer Zusammensetzung aus andern betrachtet. Die angewandte Mathematik zieht dagegen auch die physischen Eigenschaften der Dinge, welche die Größe ausmachen, in Betracht.

§. 2.

Der Begriff von Größe läßt sich, als ein einfacher, nicht definiren.

Gleichartige Größen sind diejenigen, deren innere (absolute) Merkmale dieselben sind, oder mit denen man einen gemeinschaftlichen Begriff verbindet.

Insofern man eine Größe als aus andern gleichartigen zusammengesetzt ansieht, welche dann Theile derselben heißen, legt man ihr selbst Größe (Menge) bei. Dieser Begriff von Größe (Quantitas) muß also von dem einer Größe überhaupt (Quantum) unterschieden werden. In der Vorstellung der letztern

wird dieser aber stets die erstere, Quantität, als characteristische Eigenschaft zuerkannt. —

Anmerkung. Ein und derselbe Ausdruck: Größe, für ein Quantum und für Quantität rechtfertigt sich nach der letzten Bemerkung von selbst, und man sieht leicht, daß dadurch keine Verwirrung entstehen kann. — Die gewöhnliche Erklärung: »Größe ist Alles, was sich vermehren und vermindern läßt,« enthält ebenfalls nur ein Merkmal, woran sich die Hervorbringung des Begriffs von Größe hält, und führt auf die Vorstellung von Quantität. Man dürfte ebensowohl den Satz als einen Grundsatz aufstellen: jede Größe ist einer Vermehrung und Verminderung fähig. Offenbar setzen die Worte: »vermehren und vermindern« schon die ursprünglich in unserm Bewußtseyn liegende Vorstellung von Größe voraus.

§. 3.

Betrachtet man die Größen nur als eine Vielheit (Menge) von Theilen, ohne weiter auf die Verbindung und Ordnung dieser Theile unter sich Rücksicht zu nehmen, so nennt man sie discrete (abgesonderte) Größen. Denkt man sich aber die Größe in einem ununterbrochenen Zusammenhange ihrer Theile, so heißt sie eine continuirliche oder stetig ausgedehnte (stetige) Größe.

In einer discreten Größe sind also die Theile derselben mit ihr sogleich gegeben, oder unabänderlich bestimmt, während diese bei continuirlichen Größen noch beliebig angenommen werden können.

Hieraus geht nun die Hauptabtheilung der reinen oder theoretischen Mathematik hervor, nämlich in:

Arithmetik, welche sich mit discreten Größen, und in Geometrie, welche sich mit stetigen Größen beschäftigt.

§. 4.

Indem jede discrete Größe eine Vielheit von Theilen darstellt, oder auch nur einen einzigen abgesondert angiebt, —

wie denn die Vorstellung der **Vielheit** die der **Einheit** voraussetzt, die Unterscheidung beider aber ein nothwendiges Postulat der Arithmetik ist, — wird sie durch eine **Zahl** ausgedrückt. Nicht allein, wenn eine solche Größe **bestimmt** und **gegeben**, sondern auch, wenn sie, wie bei allgemeinen Untersuchungen, noch **unbestimmt** erscheint, muß sie daher ihrem Wesen nach immer als eine **Zahl** gedacht werden. In dem ersten Falle dienen die bekannten Namen und Zeichen für die Zahlen, welche jene Größen ausdrücken; im zweiten Falle deutet man sie durch **Buchstaben** an, wo dann auch diese als Zahlzeichen anzusehen sind. Die Ausdrücke **Größen** und **Zahlen** dürfen insofern in der Arithmetik mit einander verwechselt werden; — was im Allgemeinen von den Größen gilt, die sie betrachtet, gilt auch von den Zahlen, durch welche diese möglicher Weise ausgedrückt werden.

§. 5.

So erhellet, daß **Zahlen** den eigentlichen Gegenstand der **Arithmetik** ausmachen; die nun vollständiger als die Wissenschaft erklärt werden kann,

welche die Regeln aufstellt, nach denen Zahlen mit einander verknüpft werden; und welche die gegenseitigen Beziehungen derselben in solchen Verknüpfungen aufsucht, um dadurch unbekannte Zahlen aus bekannten herzuleiten.

§. 6.

Die Arithmetik wird in **niedere** oder **Arithmetik** schlechthin, und in **Analysis** (höhere Arithmetik) eingetheilt.

Die unter dem Namen von **Algebra** begriffene Wissenschaft wird verschieden definirt. Einige verstehen den Theil der Arithmetik darunter, welcher die Lehre von den Gleichungen ausmacht, besonders wenn diese zur Auflösung von Aufgaben angewandt werden; — Andere die Buchstabenrechenkunst.

In der ersten Bedeutung kommt sie, wenigstens theilweise, schon in der niedern Arithmetik vor; und als Buchstabenrechenkunst kann sie darin nicht entbehrt werden, wenn die Lehren derselben vollständig und allgemein aufgestellt werden sollen. Beide erscheinen vielmehr mit einander verbunden, und in diesem Sinne genommen, unterscheidet sich die Arithmetik von der bloßen Zahlenrechenkunst, und ist dann nicht durch scharfe Grenzen von der Analysis getrennt.

Erster Abschnitt.

Von den Grundoperationen der Arithmetik, und deren nächsten Anwendungen.

Erstes Capitel.

Von den Zahlen im Allgemeinen.

§. 7.

Die Wiederholung einer und derselben Größe durch die Vorstellungskraft, und gleichzeitiges Zusammenfassen des Wiederholten, erzeugt ein **Vielfaches** dieser Größe, in welchem sie selbst dann als ein **aliquoter Theil** enthalten ist. Man bezeichnet diese Operation in der Arithmetik durch: **mehrmaliges Setzen einer Größe als Theil.** Ist ihre Idee in uns hervorgerufen, so stellt sich die Möglichkeit der rückwärtsschreitenden (umgekehrten) Operation von selbst dar, welche **Zerlegung in gleiche Theile** genannt wird; durch ihre Ausführung wird ein aliquoter Theil einer Größe hervorgebracht, wovon diese also wiederum ein Vielfaches darstellt. — Der Begriff beider Operationen muß vorausgesetzt werden, um die Bildung der Zahlen aus der **Einheit** erklären zu können.

Anmerkung. Außer daß die Theile einer Größe, die gleichartigen Dinge, welche sie zusammen ausmachen (§. 2), sämmtlich unter einander **gleich** sind, (außer aliquoten Theilen) können natürlich auch der Größe nach **ungleiche** Theile erscheinen. — So lange man nur weiß, daß eine Größe überhaupt ein Theil einer andern ist, kann man diesen einen

aliquanten Theil derselben nennen. Im Falle das Größen-Verhältniß einer Größe zu einem gewissen ihrer Theile genau anzugeben ist, wird sie mit ihm commensurabel (meßbar) genannt. Es läßt sich aber auch denken, daß eine Größe durch einen angenommenen Theil derselben nie genau ausgedrückt würde, und dann nennt man sie mit demselben incommensurabel. Daß ein solches Verhältniß wirklich eintreten kann, wird in der Folge bewiesen.

§. 8.

Der Theil der Größe, welcher in ihr zuerst angenommen wird und dazu dienen soll, sie selbst näher zu bestimmen, heißt ihre Einheit.

Diese Bestimmung der Größe durch ihre Einheit geschieht vermittelst der Zahl, so daß in dem Ausdrucke jeder bestimmten Zahl „die Operationen dargestellt werden, welche mit der Einheit vorzunehmen sind, um aus ihr eine Größe zu erzeugen, der sie selbst als Theil zum Grunde liegt."

Hieraus folgt, daß die Einheit als eine gegebene oder schlechthin bekannte Größe gedacht werden muß; die Zahl aber das Verhältniß bestimmt, worin die Einheit als ein angenommenes Maaß zu der Größe steht, welche durch jene ausgedrückt werden soll.

§. 9.

Hat die Einheit einer Größe keine Benennung, soll man sich nur ein beliebiges Etwas darunter vorstellen, so heißt die Zahl unbenannt. Ist dagegen die Einheit von einer bestimmten Art, die durch eine eigenthümliche Benennung angegeben wird, so entsteht eine benannte Zahl.

Anmerkung. Beschäftigt sich die Arithmetik nur mit unbenannten Zahlen, so pflegt sie reine Arithmetik zum Unterschiede der angewandten genannt zu werden, welche jene auf benannte Zahlen anwendet. Gewöhnlich sind indessen beide mehr oder weniger mit einander verbunden, und wir werden

auch hier die Anwendung der reinen Arithmetik auf benannte Zahlen in soweit beifügen, als dadurch die Regeln der gemeinen Rechenkunst in solchen Zahlen begründet, und die Lehren jener zur Auflösung bestimmter Aufgaben angewandt werden können.

§. 10.

Die ersten beiden Hauptarten von Zahlen, worauf der quantitative Unterschied zwischen der einmal angenommenen Einheit und den Größen, welche durch sie ausgedrückt werden sollen, führt, sind ganze Zahlen und Brüche. Ist die Einheit nämlich nicht größer, als die Größe, welche mittelst ihrer dargestellt werden soll, und kann man diese durch einmaliges oder mehrmaliges Setzen der Einheit hervorbringen, so entsteht eine ganze Zahl; ist sie aber selbst schon etwas Größeres, als die durch sie zu bestimmende Größe, so zerlegt man sie zuerst in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, und setzt einen solchen so oft bis jene Größe hervorgebracht wird, dadurch entsteht ein Bruch. Dieser erfordert zu seiner Erzeugung aus der Einheit also zwei Operationen: Zerlegung derselben in gleiche Theile, deren Anzahl der Nenner des Bruches angiebt, und einmaliges oder mehrmaliges Setzen eines dieser Theile, welches der Zähler desselben bestimmt. Bei dem Schreiben des Bruchs wird das Zeichen des Zählers über das des Nenners, und zwischen beide ein Horizontal-Strich gesetzt.

Es ist noch ein drittes Verhältniß der Einheit zu der Größe, welche durch sie ausgedrückt werden soll, möglich, nämlich das, worin die Einheit zwar kleiner als jene Größe ist, diese aber nicht durch wiederholtes Setzen der Einheit hervorgebracht werden kann, sondern, nachdem dies geschehen, ein kleineres Stück als die Einheit übrig bleibt; dann entsteht eine ganze Zahl mit angehängtem Bruche, also eine aus diesen beiden Hauptarten von Zahlen zusammengesetzte Zahl.

§. 11.

Eine zweite Verschiedenheit unter den Zahlen, welche nichts mit der in Hinsicht auf die Vielheit ihrer Theile gemein hat, beruht auf einer gegenseitigen Beziehung derselben, die erst erkannt oder wahrgenommen werden kann, wenn man sie als Theile zu einer einzigen neuen Zahl vereinigen will.

Gleichartigkeit muß bei einer solchen Vereinigung mehrerer Zahlen vorausgesetzt werden (§. 2.); bei dieser Eigenschaft können jedoch zwei verschiedene Fälle eintreten:

die Größen bringen nämlich bei ihrer Vereinigung entweder eine neue hervor, in der sie sämmtlich als wirklich vorhandene Theile wieder erscheinen, — dann heißen sie einstimmig, — oder sie heben sich dabei ganz oder theilweise auf; ganz, wenn sie der Größe nach gleich waren, und erscheinen also nicht sämmtlich als Theile der durch ihre Vereinigung hervorgebrachten Größe; — in diesem Falle heißen sie widerstreitend, entgegengesetzt.

Beispiele über einstimmige und widerstreitende Größen.

§. 12.

Größen, so wie Zahlen, sind hiernach entweder unter einander einstimmig oder gegen einander widerstreitend, und der Begriff dieser relativen Merkmale bringt es mit sich, daß uns eine Art von Größen bekannt oder gegeben seyn muß, um in Rücksicht auf sie, andere mit ihnen einstimmig oder widerstreitend nennen zu können.

Um diesen Unterschied zwischen Zahlen in vorkommenden Fällen zu erkennen, werden die zuerst angenommenen Größen, von denen man zur Bestimmung anderer ausgeht, so lange sie unter sich einstimmig bleiben, positive genannt. Erscheinen nun aber andere, welche mit diesen in der Beziehung des Widerstreits stehen, so heißen solche negative Größen.

§. 13.

Betrachtet man eine Größe für sich genommen, d. i. ab= abgesehen von irgend andern, auf die Vielheit ihrer Theile, so ist es klar, daß dabei nicht von positiv oder negativ die Rede seyn kann, sie wird dann absolut genommen. Da nun die Einheit eine Größe ist, welche vor irgend andern erschien, oder zuerst gegeben oder gedacht ward, so kann sie eigentlich weder positiv noch negativ genannt werden, sondern stellt sich als eine absolute Größe dar. Will man aber Zahlen aus der Einheit bilden, die mit ihr einstimmig sind, so ist sie selbst in dem Sinne, wie sie vorausgesetzt war, beizubehalten, und ein mehrmaliges Setzen oder ein Zerlegen in gleiche Theile u. s. w. mit derselben vorzunehmen. Der obigen Erklärung gemäß, müssen dadurch positive Zahlen entstehen, eben weil nun immer etwas Einstimmiges mit der zuerst angenommenen Größe hervorgeht. Daher muß man sich, wenn der Unterschied von positiv und negativ einmal gemacht werden soll, die Einheit sogleich als positiv denken. Um eine negative Zahl aus der Einheit zu bilden, hat man also zuvor das Entgegengesetzte derselben, d. h. das, was sie selbst als Theil aufheben oder vernichten würde, abzuleiten, oder sich schlechthin zu denken, und dann auf die in der Zahl übrigens angezeigte Weise zu setzen; denn dadurch erhält man stets eine Größe, die mit der zuerst angenommenen und denen mit dieser einstimmigen, widerstreitend ist.

Anmerkung. Es ist offenbar hiemit einerlei, wenn man, bei der Bildung einer negativen Zahl, sich die Einheit absolut dächte, mit ihr auf die in der Zahl vorgeschriebene Art zur Hervorbringung ihres quantitativen Verhältnisses zu dieser operirte, und dann eine der erhaltenen Größe gleichgroße entgegengesetzte annähme. Alsdann muß man aber doch, um das Widerstreitende zu erkennen, schon eine positive Größe derselben Art voraussetzen, die also hervorging, indem man

die aus der Einheit gebildete selbst beibehielt; und darin liegt es wiederum, daß die Einheit positiv gedacht ward. — Für die Folge ist es nothwendig, sich für die Entstehung positiver und negativer Zahlen an die obige Erklärung zu halten.

Andere Erklärungen von positiven und negativen Zahlen in der Arithmetik; — warum man die letztern nicht kleiner als Null nennen darf; — in wiefern man aber durch das Wegnehmen von Theilen aus einer positiven in eine negative Größe übergehen kann, und vice versa, also bei dem allmäligen Uebergange aus einer Art dieser Größen in die andere durch Null hindurchgeht u. s. w.

§. 14.

Die positiven Zahlen werden durch das Zeichen + (plus), die negativen durch das Zeichen — (minus) angedeutet. Finden diese besondern Bezeichnungen bei Größen nicht Statt, so sollen entweder bloß positive darunter gedacht werden, oder es ist willkürlich, sie sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ, also nur unter sich einstimmig zu denken. Ist aber dieser Unterschied der Zahlen einmal berücksichtigt, so sind diejenigen, vor denen kein Zeichen steht, allemal positiv zu nehmen.

§. 15.

In den beiden, §. 10 aufgestellten, Hauptarten von Zahlen in ganzen Zahlen und Brüchen können demnach positive und negative Zahlen vorkommen, daher hat man überhaupt:

positive ganze Zahlen,
positive Brüche,
negative ganze Zahlen,
negative Brüche.

Es ist wichtig, sich die Entstehung jeder dieser Zahlen aus der Einheit, welche die §§. 10 und 13 angeben, zu bemerken, und sie vollständig aussprechen zu können, nämlich:

1. eine positive ganze Zahl entsteht aus der Einheit, indem diese selbst gewisse Male gesetzt, und so zu einer Menge vereinigt wird;

2. eine negative ganze Zahl fordert das Entgegengesetzte der Einheit zu nehmen (zu denken), gewisse Male zu setzen und zu einer Menge zu vereinigen;
3. ein positiver Bruch wird aus der Einheit gebildet, indem sie in eine gewisse Menge gleicher Theile zerlegt, ein solcher gewisse Male gesetzt und dies zu einer Menge vereinigt wird;
4. ein negativer Bruch entsteht aus der Einheit, indem das Entgegengesetzte derselben in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zerlegt, ein solcher gewisse Male gesetzt und dies zu einer Menge vereinigt wird.

Anmerk. Wenn eine Größe durch eine dieser Zahlen genau dargestellt wird, so ist sie also mit der Einheit commensurabel. (§. 7. Anmerk.) Denkt man sich aber die Größe mit der einmal gewählten Einheit incommensurabel, so kann sie auch durch keine Zahl genau ausgedrückt werden. In solchem Falle wird die Untersuchung darauf gerichtet, eine Zahl anzugeben, welche beinahe (annäherungsweise) die Größe ausdrückt, und man hat es dadurch für sie wiederum mit einer der obigen Arten von Zahlen zu thun.

§. 16.

Der Bruch, als aus zwei ganzen Zahlen bestehend (Zähler und Nenner desselben), setzt die Behandlung und Verknüpfung solcher voraus, daher diese den ersten Gegenstand der Untersuchungen ausmachen müssen, und erst später zu den Verknüpfungen der Brüche unter sich und mit ganzen Zahlen fortgeschritten werden kann.

Zweites Capitel.

Von der Bildung und Bezeichnung ganzer Zahlen, oder der Numeration.

§. 17.

Die durch unsere Vorstellungskraft ausgeführte einfache Operation zur Hervorbringung ganzer Zahlen, heißt Zählen. Dabei wird also durch mehrmaliges Setzen von einerlei Größe (der angenommenen Einheit) eine Vielheit derselben erzeugt. (Vergl. §. 7 — §. 10). Die Einheit kann aber beliebig oft wiederholt werden, und so können kleinere oder größere ganze Zahlen entstehen, zu deren Unterscheidung Namen und Zeichen erforderlich sind. Die besondere Feststellung hierüber, d. h. das Gesetz, nach welchem die ganzen Zahlen bis zu jeder Höhe hin auszudrücken sind, muß näher nachgewiesen werden. Diese Lehre wird die Numeration genannt.

§. 18.

Bei der unbeschränkten Weite, bis zu welcher man zählen kann, ist es nämlich unmöglich für jede Zahl eigenthümliche einfache Namen und Zeichen einzuführen. Das Verfahren, welches man beobachtet, um durch die Ausdrücke für einige ganze Zahlen auch jede fernere anzugeben, ist vielmehr folgendes:

man nimmt eine gewisse Menge an, bis zu welcher man jeder Zahl einen eignen Namen und ein eignes einfaches Zeichen giebt; die Zahl, welche diese Menge ausdrückt, heißt die Grundzahl des Zahlensystems, die ihr vorhergehenden heißen einfache Zahlen. Die der Grundzahl entsprechende Menge wird nun als eine Einheit höherer Ordnung, und zwar der ersten höhern Ordnung, angenommen. Nach ihr werden

bei dem weitern Zählen gewisser Dinge diese wiederum für sich gezählt, bis deren Anzahl ihr abermals gleich kommt; dann wird wieder wie zuerst mit dem Zählen angefangen, und so fortgefahren, zugleich aber bemerkt, wie viele Male die gezählte Menge der Grundzahl gleich kam. Sobald dies selbst so viel beträgt, als die Grundzahl einfache Einheiten enthält, heißt der Inbegriff davon eine Einheit der zweiten höhern Ordnung. Auf diese Weise steigt man zu immer höhern Ordnungen auf, zählt die Anzahl jeder, so wie die der einfachen Einheiten, für sich, und erhält allemal eine Einheit nächst höherer Ordnung, wenn die Anzahl der ihr vorhergehenden gleich der Grundzahl geworden ist. —

Die hierdurch entstehende Zahl heißt, im Gegensatze zu den einfachen Zahlen, eine zusammengesetzte (vielziffrige); in ihr werden also Einheiten verschiedener Ordnungen und deren Anzahl angegeben.

§. 19.

Die für die einfachen Zahlen gewählten Zeichen werden Ziffern genannt. Um eine zusammengesetzte Zahl zu schreiben, hat man nur die Zeichen der einfachen nöthig, da die Menge der Einheiten jeder Ordnung die höchste einfache Zahl nicht übersteigen kann. Um aber dabei die besondere Andeutung der Ordnung zu ersparen, deren Menge die einzelnen Ziffern einer zusammengesetzten Zahl bestimmen, dient die allgemeine Regel:

man schreibt zuerst die Anzahl der höchsten in der gezählten Menge vorkommenden Einheiten durch die ihr entsprechende Ziffer nieder, läßt nun der Reihe nach die für die niederern Ordnungen folgen, und schließt mit der Anzahl der einfachen Einheiten, wodurch der Rang der Einheit, deren Menge in jeder Ziffer gezeigt wird, durch die

Anzahl der dieser Ziffer nachfolgenden ausgesprochen wird. Da aber von einer gewissen Art von Einheiten auch gar keine vorkommen können, so muß man noch ein Zeichen haben, um diese Abwesenheit anzudeuten. Dazu dient das Zeichen der Null, mit welcher die Stelle ausgefüllt wird, welche jene Einheiten einnehmen würden, so daß nun doch die übrigen Ziffern jenem Gesetze gemäß ihren Rang bekommen können. Wenn z. B. die 5te Ordnung die höchste wäre, welche in einer Zahl vorkömmt, so sind noch vier niedrigere Ordnungen vorhanden, und nimmt man die Ordnung Null dazu, so hat man überhaupt fünf Plätze mit den Ziffern zu besetzen, die die Menge von jeder dieser Ordnungen angeben. Allgemein folgt die Ausführbarkeit der obigen Regel, weil es bei jeder Zahl eben so viele niedrigere giebt, wie sie selbst anzeigt, wenn man die Null mitrechnet.

§. 20.

Die erste Ziffer einer vielziffrigen Zahl von der Linken an, welche die Menge der höchsten in der Zahl vorkommenden Einheiten angiebt, pflegt die höchste Ziffer; die für die einfachen Einheiten (die erste von der Rechten an) die niedrigste Ziffer genannt zu werden. Die Ordnung oder der Rang einer Zahl wird mit dem Range ihrer höchsten Ziffer gleichbedeutend genommen. Die einfachen Einheiten heißen auch vom Range Null.

Ist in der gezählten Menge nur eine höhere Einheit einmal vorhanden, so besteht die Zahl aus einer Eins mit so vielen Nullen, als der Rang dieser Einheit. Eine solche Zahl wird schlechthin eine höhere Einheit, oder auch eine Ordnungs-Einheit genannt. Diese höhern Einheiten haben in unserm gebräuchlichen Zahlensysteme zum Theil noch besondere Namen bekommen, welche nach dem Vorigen indessen nicht nothwendig wären.

§. 21.

In dem allgemein angenommenen Zahlensysteme ist die Grundzahl **zehn**, daher es das **decadische** genannt wird. Wir haben also neun Zahlzeichen (sie sind der Reihe nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) und das Zeichen der Null (0). — Da die Wahl der Grundzahl willkürlich ist, so läßt sich jede Zahl auch mit mehr oder wenigern Ziffern schreiben und so entstehen **verschiedene Zahlensysteme**.

Jede Zahl ist bestimmt, — die Menge der darin gezählten Dinge kann eingesehen und angegeben werden, — wenn man die Grundzahl und die Bedeutung der Ziffern kennt.

Anmerk. Die Kenntniß der Namen unserer einfachen Zahlen, und das Aussprechen vielziffriger im decadischen Zahlensysteme, welche letztere, den gegebenen Regeln gemäß, geschrieben sind, wird hier aus der gemeinen Rechenkunst als bekannt vorausgesetzt. Es mag hier nur noch bemerkt werden, daß es für die Behandlung vielziffriger Zahlen, und für den Beweis mancher Operationen, bequemer ist, eine Zahl, wie z. B. 58473, anstatt sie auf gewöhnliche Weise durch: Acht und funfzig tausend, vierhundert und drei und siebenzig auszusprechen, allgemeiner folgendermaßen zu lesen: **fünf Einheiten der vierten Ordnung, acht der dritten, vier der zweiten, sieben der ersten und drei einfache Einheiten.** — Nach den aufgestellten allgemeinen Principien ist es leicht, auch in andern Zahlensystemen Zahlen zu schreiben, und die Menge, welche sie angeben sollen, zu erkennen.

Erläuterung durch Beispiele aus verschiedenen Zahlensystemen; wie eine Zahl aus einem andern Zahlensysteme, in das decadische übergetragen werden kann, und wie die umgekehrte Aufgabe zu lösen ist.

Drittes Capitel.

Die vier Species in ganzen, positiven und negativen Zahlen.

§. 22.

Unter dem Namen der vier Species begreift man vier verschiedene Operationen, welche als die Grundoperationen der Arithmetik angesehen werden müssen, indem den Gegenstand derselben die einfachen Zahlenverknüpfungen ausmachen, auf welche alle zusammengesetztere in ihrer völligen Zurückführung begründet werden. — Sie heißen:

Addition,
Subtraction,
Multiplication und
Division.

§. 23.

Um diese Operationen mit allen Arten von Zahlen vorzunehmen, ist es nöthig, ihre Erklärungen in der größten Allgemeinheit aufzustellen, wie im Nachfolgenden geschehen wird. Dann unterscheiden sie sich von den Definitionen, die für die betreffenden Operationen in der gemeinen Rechenkunst gegeben werden, wo man sie bloß ganzen Zahlen anpaßt, und den Unterschied der Zahlen in Beziehung auf Einstimmigkeit und Widerstreit nicht in Erwägung zieht, sondern sie stillschweigend einstimmig annimmt.

Zur leichtern Uebersicht der folgenden Darstellungen mag ferner vorläufig bemerkt werden, daß die Ableitung der Regeln für die Ausführung jeder Operation in allen Fällen darauf zurückkommt, daß man der allgemeinen Erklärung derselben gemäß verfährt, und dabei die Natur der Zahlen berücksichtigt, an denen man operirt. Der Beweis solcher Regeln beruht dann auch auf diesen Principien. Die Entstehung

der

der Zahlen aus der Einheit, und die allgemeine Erklärung der Operationen, sind daher immer wiederkehrende Grundzüge in den Untersuchungen der Arithmetik.

Anmerk. Außer den Zeichen, welche für die Andeutung der Operationen eingeführt werden, kommen noch folgende in der Arithmetik vor:

= ist das Zeichen der Gleichheit, wird ausgesprochen: gleich (aequal).

< > ist das Zeichen der Ungleichheit, ausgesprochen: ungleich (größer oder kleiner);

das Zeichen > mit dem offenen Ende einer Größe zugekehrt, bedeutet, daß sie größer, mit dem geschlossenen Ende der Größe zugewandt, daß sie kleiner als eine folgende sey. Z. B. $a > b$, heißt: a größer als b.

Addition.

§. 24.

Durch die Addition werden mehrere gleichartige Zahlen als Theile zu einem Inbegriff vereinigt, so daß in einer Zahl ausgesprochen wird, was in jenen einzelnen liegt.

Die Größe, welche durch die Vereinigung der zu addirenden Größen (Summanden) hervorgebracht wird, heißt die Summe oder das Aggregat. Die Andeutung dieser Operation geschieht durch das Zeichen + (plus ausgesprochen), welches zwischen die Summanden gesetzt wird.

Anmerk. Vergleicht man die obige Erklärung mit der des Zählens (§. 17), so erhellet sogleich, daß letzteres als ein specieller Fall der Addition erscheint, nämlich als der, worin die zu addirenden Größen sämmtlich einander gleich (jede die Einheit) sind. Aber die Ausführung dieses Falles jener Operation muß schon vorausgesetzt werden, denn gerade auf ihn werden, wie sich ergeben wird, die übrigen Fälle zurückgeführt.

§. 25.

Bei der Vereinigung gleichartiger Größen als Theile zu einer neuen, verhielten sich einstimmige und widerstreitende auf ganz verschiedene Art (§. 11); eben deshalb muß die Addition bei beiden Arten von Größen, oder den Zahlen, die sie ausdrücken, auch auf verschiedene Art ausgeführt werden. Es giebt daher zwei Hauptfälle der Addition.

§. 26.

Sind zwei einstimmige Zahlen gegeben, so heißt die Regel für ihre Addition:

man zähle die Menge der einen Zahl der Menge der andern hinzu, und gebe der dadurch gebildeten neuen Zahl das Zeichen, welches jene beiden hatten.

Die Summe wird hier also positiv oder negativ, je nachdem es die addirten Zahlen waren.

Der Beweis dieser Regel geht daraus hervor, daß durch dieses Zusammenzählen eine Zahl gebildet wird, worin die beiden gegebenen als wirklich vorhandene Theile liegen, welches sowohl die Addition, als auch die Einstimmigkeit der Zahlen vorschreiben. Z. B.

$$5 + 7 = 12;$$
$$-5 + -7 = -12;$$

§. 27.

Sind mehr als zwei unter einander einstimmige Zahlen zu addiren, so wiederholt sich die Regel; man zählt nämlich erst zwei zusammen, zu dieser Summe die dritte u. s. w. Die dadurch gebildete Summe wird die sämmtlichen addirten Größen als Theile enthalten, ist also was man suchte. Z. B.

$$4 + 3 + 8 = 7 + 8 = 15;$$
$$-3 + -8 + -6 = -11 + -6 = -17.$$

Es ist dabei noch zu bemerken, daß die Ordnung, in

welcher die einzelnen Zahlen vereinigt werden, willkürlich ist; denn die Größe der Summe hängt offenbar nur von der Größe der zu addirenden Zahlen, nicht aber von ihrer Folge ab.

§. 28.

Sind die zu addirenden Größen in Buchstaben gegeben, so kann wegen der Unbestimmtheit der Menge von Einheiten, welche durch einen Buchstaben ausgedrückt wird, das Zusammenzählen nicht wirklich vorgenommen werden, und es bleibt nur die Andeutung dieser Operation übrig; wie z. B. $a + b = a + b = b + a$; $- a + - b = - a + - b$ u. s. w.

Man pflegt indessen bei solchen Ausdrücken das Additionszeichen wegzulassen und die Größen nur mit ihren eigenthümlichen Zeichen als Theile neben einander zu setzen, indem diese schon auf eine Vereinigung derselben hindeuten; nämlich, so wie anstatt $+ a + + b$ nur geschrieben wird: $a + b$, ist auch $- a + - b = - a - b$; welches letztere durch Hülfe der Klammern (Parenthesen) geschrieben wird: $- (a + b)$ und dann zugleich die Regel des §. 26 in Zeichen ausdrückt.

Eben so ist also:

$$- 3 + - 4 = - 3 - 4 = - (3 + 4) = - 7.$$

§. 29.

Wenn ein gewisser Buchstab mehrere Male gesetzt werden soll, so deutet man dies dadurch an, daß man ihm die Zahl vorsetzt, welche angiebt wie oft er zu nehmen sey (z. B. 5 a). In einem solchen Buchstaben-Ausdrucke, wird die bestimmte Zahl (5) der Coefficient des Buchstabens genannt. Es folgt hieraus, daß 5 a angesehen werden kann, als durch fünfmalige Addition der Größe a entstanden, oder daß darin a gleichsam als Einheit zum Grunde liegt, und dieser Ausdruck als allgemeines Schema einer benannten Zahl erscheint. Zwei Buch-

staben-Größen, worin einerlei Buchstab vorkommt, z. B. 5 a und 8 a, heißen daher gleichnamig; und im andern Falle ungleichnamig, wie 5 a und 8 b u. dgl. m. Steht ein Buchstab, der eine arithmetische Größe vorstellt, allein, so ist sein Coefficient gleich 1 anzunehmen, da er nun nur einmal gesetzt seyn soll.

Gleichnamige Buchstaben-Größen werden addirt, indem man der Summe ihrer Coefficienten den gemeinschaftlichen Buchstaben wieder beifügt. Denn die Vereinigung solcher Größen zu einem Inbegriff wird offenbar durch die der Zahlen, welche deren Menge angiebt, geschehen; es kann und darf sich dabei aber die Art derselben nicht ändern. Z. B.

$$5a + 3a = 8a;\ 6c + c + 9c + 2c = 18c;$$
$$-6a - 2a - 4a = -12a.$$

§. 30.

Die Summe zweier entgegengesetzter Zahlen wird gebildet, indem man die Menge der kleinern von der der größern hinwegnimmt (abzählt) und dem Uebrigbleibenden das Zeichen der größern giebt; denn nach dem Begriff des Wiederstreits heben sich gleiche Theile dieser Zahlen bei ihrer Vereinigung gegenseitig auf; es muß also die Menge der einen in der der andern als Theil vernichtet werden, welches durch jenes Hinwegnehmen geschieht, damit in einem Inbegriff ausgesprochen werde, was beide für sich enthielten. Auch wird die Summe von der Art der größern Zahl (in Hinsicht auf etwas Positives oder Negatives) seyn, da sich die kleinere ganz aufgehoben hat.

Sind beide zu vereinigende entgegengesetzte Zahlen der Größe nach gleich, so ist aus diesem Verfahren klar, daß ihre Summe gleich Null wird, wie es auch nach §. 11 verlangt wird. Hiernach ist z. B.

$$9 + - 5 = + 4$$
$$14 + - 20 = - 6$$
$$4 + - 4 = 0.$$

§. 31.

In Buchstaben kann wiederum die Vereinigung nur angedeutet werden. Es ist daher $a + - b = a + - b$. Der Bemerkung des §. 28 zufolge, fallen dabei aber die doppelten Zeichen weg, nämlich $a + - b = a - b$ oder auch $= - b + a$. Man läßt bei Andeutung solcher einzelner Theile einer Größe, den positiven gewöhnlich vorangehen, damit ein Zeichen entbehrt werde, und schreibt also nicht $- b + a$ sondern $a - b$.

Bestehen beide Größen aus einerlei Buchstaben, so können sie nach der im §. 29 gegebenen Regel wirklich vereinigt werden. Z. B.

$$5\,a - 3\,a = 2\,a;$$
$$- 8\,a + 5\,a = - 3\,a.$$

Anmerk. Die §§. 26 und 30 zeigen, daß die Addition einstimmiger Größen in einem Zusammenzählen (der Addition der gemeinen Rechenkunst); die Addition widerstreitender Größen in einem Abzählen oder Abziehen (der Subtraction der gemeinen Rechnenkunst) besteht. In dem allgemeinern Sinne umfaßt also die Addition diese beiden Operationen, und wird dann auch wohl zum ausdrücklichen Unterschiede von dem engern Begriffe, die algebraische Addition genannt.

§. 32.

Sind nun beliebig viele Größen zur Addition gegeben, worunter einige positiv, andere negativ sind, so addire man zuerst die unter sich einstimmigen nach §. 26, wodurch zwei Summen, eine positive und eine negative, hervorgehen; diese vereinigt man hierauf nach §. 30, so erhält man das Aggregat aller anfänglich gegebenen Größen. Z. B.

$$2 - 5 - 7 + 3 + 4 = + 9 - 12 = - 3;$$
$$- a - c + b - d + f = b + f - (a + c + d);$$
$$3\,a + 5\,a - 2\,a - a + 7\,a - 4\,a = 15\,a - 7\,a = 8\,a.$$

§. 33.

Kommen in einem algebraischen Ausdrucke mehrere Buchstaben-Größen als Theile vor, die dann mit ihren entsprechenden Zeichen (plus oder minus) neben einander gesetzt sind, — wie dergleichen nach §. 28 und §. 31 durch Addition hervorgehen können, — so nennt man dies einen zusammengesetzten Buchstaben-Ausdruck. Z. B.

$3a + 4b - 2c + d$; oder auch $a + b$; $a - b$; $-2a - 5b$ u. dgl. m.

Sind nun zwei oder mehrere solche Formen selbst wieder zur Addition gegeben, so wendet man auf sie die im Vorigen abgeleiteten Regeln an, indem man dabei die gleichnamigen Größen nach §. 29 wirklich vereinigt, die ungleichnamigen aber in dem Resultate, sie mit ihren Zeichen verbindend, in beliebiger Ordnung neben einander schreibt. Z. B.

$$(3a + b - 4c) + (7a - 5b + 8c) + (5c - 2d) = 10a - 4b + 9c - 2d.$$

Man pflegt bei der Addition dieser Ausdrücke, sie so unter einander zu schreiben, daß dieselben Buchstaben in einer Vertical-Reihe stehen, um die zu addirenden Coefficienten derselben bequemer übersehen zu können. Hierdurch gehen die gewöhnlichen Additions-Exempel in der Buchstaben-Rechenkunst hervor.

Beispiele. I

$$\begin{array}{rrr} 7a & -3b & +5x \\ -6a & +2b & -7x \\ \hline a & -b & -2x \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{rrrrr} 5a & +x & -d & -3f & \\ a & -4x & & -f & +4g \\ \hline 6a & -3x & -d & -4f & +4g \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{rrrrr} 3a & +5b & -2c & +d & \\ a & +8b & -3c & -4d & \\ -2a & -6b & +8c & & -4f \\ \hline 2a & +7b & +3c & -3d & -4f \end{array}$$

§. 34.

Die Addition vielziffriger Zahlen gründet sich ganz auf dies Verfahren bei der Vereinigung zusammengesetzter Größen überhaupt. Die einzelnen Ziffern einer solchen Zahl erscheinen nämlich als Coefficienten, die neben den Einheiten der verschiedenen Ordnungen stehen, welche in ihr angegeben werden; denn sie zeigen, wie vielmal diese vorkommen. Bei dem Zusammenzählen müssen daher die Einheiten von einerlei Ordnung zusammengezählt werden. Dabei geschieht das Uebertragen von Einheiten gewisser Ordnungen, wenn ihre Menge ein oder mehrere Male der Grundzahl gleich kommt, zu denen der nächst höhern Ordnung, wie es im Numeriren gelehrt ist. Bei der Addition zweier entgegengesetzter Zahlen, wobei ein Abzählen eintritt, müssen eben so die Einheiten einerlei Ordnung von einander abgezogen werden.

In beiden Fällen werden daher die Zahlen so untereinander geschrieben, daß die Ziffern gleichen Ranges in einer Vertical-Reihe stehen, um allemal die untereinander stehenden zu vereinigen. Beim letztern könnte es sich ereignen, daß in der kleinern Zahl die Menge der Einheiten einer gewissen Ordnung größer ist, als die derselben Ordnung in der größern Zahl, wovon erstere weggenommen werden soll; alsdann wird in jener eine Einheit der nächst höhern Ordnung in die der Grundzahl entsprechende Menge ihrer nächst niedrigern aufgelöst, worauf sich das geforderte Hinwegnehmen ausführen läßt. Hierin beruht das sogenannte Borgen beim Abziehen.

Beispiele für die Addition vielziffriger Zahlen im decadischen und in andern Zahlensystemen.

§. 35.

Wenn gleichartige Größen durch benannte Zahlen ausgedrückt und zur Addition gegeben sind, so müssen sie durch bekannte Reduction zuerst auf einerlei Benennung gebracht wer-

den. Die Summe gleichbenannter Zahlen wird aber gefunden, indem man die gleichgroßen unbenannten Zahlen (die absoluten Zahlen) addirt, und diesem Resultate dieselbe Benennung wieder beilegt. Denn es hängt der Inbegriff, welcher diese Größen als Theile enthält, lediglich von der Zahl ab, die die Menge einer jeden darstellt, während deren Benennung die Art der gemeinschaftlichen Einheit angiebt. (Vergl. §. 29).

Anmerk. Die Reduction einer benannten Zahl auf einen niedrigern Namen geschieht, indem man sie mit der Reductionszahl (die Zahl, welche die Anzahl der Einheiten des niedrigern Namens angiebt, die eine Einheit des höhern Namens ausmachen) multiplicirt. Z. B. Um Pfunde in Lothe zu verwandeln, ist die Reductionszahl 32. Bei der umgekehrten Aufgabe: um eine benannte Zahl auf einen höhern Namen zu bringen, muß man sie daher mit der Reductionszahl dividiren.

Subtraction.

§. 36.

Bei der Subtraction wird eine Zahl gegeben welche man als durch die Vereinigung (Addition) zweier anderer entstanden, ansehen soll, sie heißt Minuendus; die eine von jenen beiden, der Subtrahendus, wird gleichfalls gegeben; die andere, Differenz oder Rest genannt, soll durch diese Operation bestimmt werden.

Diesem gemäß kann die durch die Subtraction zu suchende Zahl als eine solche erklärt werden, die zu einer gegebenen addirt, eine andere gegebene hervorbringt.

Das Zeichen der Subtraction ist ein — (minus ausgesprochen), welches zwischen Minuend und Subtrahend so gesetzt wird, daß ersterer vorangeht.

§. 37.

Die Subtraction hebt die Addition wieder auf, oder trennt, was diese verknüpfte; sie ist daher das Entgegengesetzte

der Addition; denn unmittelbar aus obiger Erklärung folgt, daß, wenn zuerst eine Zahl durch Addition zweier anderer hervorgebracht ist, jede dieser beiden wieder erscheinen muß, indem die andere von jener ersten subtrahirt wird. In Zeichen drückt man diesen Satz so aus:

Wenn $a + b = c$, so ist
$c - b = a$, und
$c - a = b$.

Derselbe Satz kann auch so ausgesprochen werden: addirt man zu einer Größe eine andere und subtrahirt letztere wieder von dem Resultate, so bleibt die erstere unverändert. In Zeichen:

Es ist $a + b - b = a$.

§. 38.

Die Bestimmung des Restes, oder die Ausführung der Subtraction geschieht in allen vorkommenden Fällen nach folgender allgemeinen Regel:

man gebe dem Subtrahend das entgegensetzte Zeichen (d. h. man nehme ihn positiv, wenn er negativ, und negativ, wenn er positiv ist), und addire ihn so zum Minuend; das Resultat stellt den gesuchten Rest dar.

Der Beweis dafür geht aus der Erklärung der Subtraction leicht hervor. Ihr gemäß besteht der Minuend aus zwei ihn durch Addition erzeugenden Stücken: dem Subtrahend und dem Reste; es kommt also, um den letztern zu erhalten, nur darauf an, den Subtrahend im Minuend zu vernichten. Nun ist aus der Addition, so wie aus dem Begriff des Widerstreits bekannt, daß zwei Größen der Menge nach gleich, dem Zeichen nach entgegengesetzt, sich bei ihrer Vereinigung gegenseitig aufheben; den Subtrahend entgegengesetzt genommen zum Minuend addirt, vernichtet ihn mithin in diesem und muß die an-

dere Größe, den Rest, welche durch Vereinigung mit der vernichteten den Minuend vorher erzeugte, als Resultat geben.

Anmerk. Die Probe für die richtige Bestimmung des Restes ist in der Erklärung desselben sogleich enthalten, da er, zum Subtrahend addirt, den Minuend wieder geben muß. Es versteht sich aber, daß eine solche Probe keinen allgemeinen Beweis begründen kann, den man sich vielmehr aus der obigen Darstellung völlig klar machen wird. Um ihn an Zahlen-Beispielen zu üben, können folgende dienen:

1) Ist 8 der Minuend, 6 der Subtrahend, so ist $8 + (-6) = 2$ die Differenz; denn -6 hebt $+6$ als Theil in 8 auf, und es giebt in der That $6 + 2$ den Minuend 8 wieder.

2) Ist 9 der Minuend, 14 der Subtrahend, so ist $9 + (-14) = -5$ die Differenz; denn -14 hebt $+14$ als Theil in 9 auf, und es entsteht -5, welches mit $+14$ vereinigt, wirklich 9 hervorbrachte.

3) Ist -8 der M., -6 der S., so ist $-8 + 6 = -2$ die Differenz, und es wird $-6 + -2 = -8$.

4) Ist -9 der M., -14 der S., so ist $-9 + 14 = 5$ die Diff., und es wird $5 - 14 = -9$.

5) Ist 7 der M., und -5 der S., so ist $7 + 5 = 12$ die Diff., und es wird $-5 + 12 = 7$.

6) Ist -7 der M., und 9 der S., so ist $-7 + (-9) = -16$ die Diff., und es wird $9 + (-16) = -7$.

§. 39.

Die Ausführung der Subtraction kommt hiernach allemal auf die Addition zweier Größen zurück und zwar: wenn Minuend und Subtrahend gleiche Zeichen haben, auf Addition zweier widerstreitender Größen, also auf ein Abziehen; wenn Minuend und Subtrahend entgegengesetzte Zeichen haben auf Addition zweier einstimmiger Größen, also auf ein Zusammenzählen. Da beide Fälle der Addition für alle Arten von Größen im Vorhergehenden abgehandelt sind, so ergiebt sich zugleich das Verfahren der Subtraction daraus, Minuend und

Subtrahend mögen Zahlen oder Buchstaben-Ausdrücke, einfache oder zusammengesetzte Größen seyn.

§. 40.

Es kann indessen noch bemerkt werden, daß wenn der Subtrahend aus Theilen besteht, — mithin bei der Ausübung dieser Operation, wo er entgegengesetzt genommen und so addirt werden soll, jedem seiner Theile das entgegengesetzte Zeichen gegeben werden muß, — die Einschließung des Subtrahends in Klammern, um ihn durch das Zeichen der Subtraction mit dem Minuend zu verbinden, erforderlich ist. — Die Subtraction wirklich verrichten, heißt dann auch **die Klammern auflösen.** Z. B.

$$a - (b + c - d) = a - b - c + d.$$

Man pflegt bei Buchstaben-Ausdrücken, wenn der Subtrahend so unter den Minuend gesetzt ist, wie in der Addition gezeigt wurde, unter das Zeichen des erstern, also wenn er aus Theilen besteht, unter jedes seiner einzelnen Theile, das entgegengesetzte zu schreiben, um sie, mit diesen Zeichen genommen, zu addiren.

Beispiele.

$$\begin{array}{rrrrrr} \text{Minuend} & 2a & +5b & -3c & +8d & \\ \text{Subtrahend} & 5a & -4b & -2c & -3d & +f \\ & - & + & + & + & - \\ \hline \text{Differenz} & -3a & +9b & -c & +11d & -f \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} \text{Minuend} & 12x & -5y & -z & +3w & +7v \\ \text{Subtrahend} & 8x & +9y & -5z & +3w & +4v \\ & - & - & + & - & - \\ \hline \text{Differenz} & 4x & -14y & +4z & & +3v \end{array}$$

§. 41.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß es einerlei ist, eine positive Größe zu subtrahiren, oder sie negativ anzusehen und zu addiren, und umgekehrt. — In dem Ausdruck $a - b$ kann b als positiv aber zu subtrahiren, oder als negativ

und zu addiren, angesehen werden. So erhellet, warum die Zeichen der Addition und Subtraction mit denen für positive und negative Größen einerlei seyn konnten.

Hierauf stützt sich auch die Erklärung negativer Größen als subtractive. — Uebereinstimmung dieser Erklärung mit der im Vorigen darüber gemachten Darstellung.

Multiplication.

§. 42.

Bei der Multiplication werden zwei Zahlen gegeben, Multiplicand und Multiplicator und verlangt: dieselben Operationen mit dem Multiplicand vorzunehmen, die man mit der Einheit vornahm, um aus ihr den Multiplicator zu bilden. — Die auf solche Art aus dem Multiplicand entstehende neue Größe heißt das Product oder Factum. Die Andeutung der Multiplication geschieht durch einen zwischen Multiplicand und Multiplicator gesetzten Punct (.) auch wohl durch das Zeichen × z. B. a . b heißt a soll mit b multiplicirt werden.

Anmerk. Multiplicand und Multiplicator unterscheiden sich also wesentlich von einander, indem letzterer die Operationen angiebt, die an ersteren vorgenommen werden sollen. Wenn in der Folge auch gezeigt wird, daß beide Zahlen in gewissen Fällen ihre Functionen mit einander verwechseln dürfen, so ist doch bei den Ableitungen und Beweisen der Sätze für die Multiplication, auf jenen Unterschied ausdrücklich Rücksicht zu nehmen — worauf Anfänger wohl aufmerksam seyn müssen.

§. 43.

Die erste Untersuchung für die Ausführung der Multiplication in irgend einem gegebenen Falle, ist immer die, wie der Multiplicator aus der Einheit entstand? dazu dienen die Sätze des §. 15. Für die Einheit wird alsdann

der Multiplicand an die Stelle gesetzt, und das Resultat der an ihm vollzogenen Operation giebt das gesuchte Product. — Es ist eine unmittelbare Folge hieraus, daß zum Multiplicator nur eine unbenannte Zahl genommen werden darf; die Einheit muß darin unbestimmt erscheinen, denn die Operationen, die an einer solchen vorgeschrieben werden, sollen mit dem bestimmten Multiplicand vorgenommen werden, der alsdann im Producte gleichsam als Einheit zum Grunde liegt. — Der Multiplicand kann aber eine benannte oder unbenannte Zahlen seyn, und im erstern Falle muß das Product dieselbe Benennung erhalten, welche dieser Zahl beigelegt war.

§. 44.

Entstand der Multiplicator aus der Einheit dadurch, daß sie selbst mehrere Male gesetzt, und dies zu einer Menge vereinigt ward, d. h. ist er eine ganze positive Zahl, so wird auch, um der Forderung der Multiplication zu genügen: der Multiplicand selbst, mehrere Male gesetzt und zu einer Summe vereinigt, das Product hervorbringen.

Das Zeichen des Products richtet sich in diesem Falle nach dem des Multiplicands; denn die Summe positiver Größen ist positiv, und die Summe negativer Größen negativ (§. 26.). Man spricht diesen Satz so aus: Positives mit Positivem multiplicirt, giebt ein positives, Negatives mit Positivem multiplicirt, ein negatives Product. Z. B.

$$4 \,.\, 3 = 4 + 4 + 4 = 12;$$
$$(-4) \,.\, 3 = (-4) + (-4)\ (-4) = -12.$$

Anmerk. Der Fall, worin der Multiplicator eine ganze postive Zahl ist, ist derjenige, welcher der gewöhnlichen Erklärung der Multiplication entspricht: daß sie mehrmaliges Setzen,

Vervielfältigen, sey; denn alsdann verlangt der Multiplicator keine andere Operationen, als diese. Mehrmaliges Setzen einer Größe ist also immer Multiplication derselben mit einer ganzen Zahl, welche gleich der Anzahl ist, wie oft jene Größe gesetzt werden soll. Aber der Satz darf nicht umgekehrt werden: Multiplication ist nicht immer mehrmaliges Setzen; — wie die Rechnung mit Brüchen ergeben wird. —

§. 45.

Ist der Multiplicator eine negative Zahl, so entstand er aus der Einheit dadurch, daß man zuerst das Entgegengesetzte derselben ableitete (sich dachte), und dies wiederholt zu einer Menge vereinigte; darum muß nun das Entgegengesetzte des Multiplicands mehrere Male gesetzt und vereinigt werden. — Hier wird also das Product negativ, wenn der Multiplicand positiv; positiv, wenn er negativ war. Oder: Positives mit Negativem multiplicirt, giebt ein negatives; Negatives mit Negativem multiplicirt, ein positives Product. Z. B.

$$4 \cdot (-3) = (-4) + (-4) + (-4) = -12;$$

$$(-4) \cdot (-3) = 4 + 4 + 4 = +12.$$

§. 46.

Aus den beiden letzten §§. folgt in Absicht auf die Zeichen des Products die allgemeine Regel: Gleiche Zeichen des Multiplicands und Multiplicators geben ein positives, ungleiche Zeichen derselben ein negatives Product. Ferner ergiebt sich aus ihnen, daß die Multiplication in ganzen Zahlen allemal auf eine Addition gleicher Größen zurückkommt. — Diese Zurückführung der Multiplication auf Addition kann aber bei ihr als einer eigenthümlichen Operation nicht allein hinreichen, sondern es müssen für ihre Ausführung besondere Regeln abgeleitet werden. — Bei einfachen Größen lassen sich indessen keine andere geben. Für Zahlen gewährt

dabei das **sogenannte Einmaleins**, eine Productentafel aller einfachen Zahlen, eine Abkürzung.

§. 47.

Wenn beide, Multiplicand und Multiplicator, unbenannte Zahlen sind, so dürfen sie mit einander verwechselt werden, oder es ist einerlei, welche von beiden Zahlen man zum Multiplicator, und welche man zum Multiplicand annehmen will. Daß diese Verwechselung auf das Zeichen des Products keinen Einfluß hat, geht aus der eben abgeleiteten Regel hervor; daß die Größe desselben aber dadurch auch nichts leidet, erhellet folgendermaßen: indem man den Multiplicand so oft setzt, als die Einheit im Multiplicator gesetzt war, setzt man jede der Einheiten des Multiplicands so oft, als der Multiplicator angiebt, denn durch das Setzen des Ganzen, wird zugleich jeder seiner Theile gesetzt; dadurch wird mithin der Multiplicator so oft gesetzt, als Einheiten im Multiplicand liegen, d. h. jener mit diesem multiplicirt. —

Es sey allgemein a mit b zu multipliciren, also a der Multiplicand und b der Multiplicator; dann hätte man $a + a + a + a \ldots$ bis die Anzahl des Setzens von a so viel als b beträgt. Indem man a setzt, wird aber jede Einheit dieser Größe gesetzt; jede Einheit in a wird also b mal genommen, oder für sie wird b gesetzt, und da deren so viel als a anzeigt vorkommen, so wird b selbst a mal gesetzt, d. h. es ist nun b mit a multiplicirt. Demnach ist $a \, . \, b = b \, . \, a$.

Hierin liegt der Grund des gemeinschaftlichen Namens: **Factoren eines Products**, für Multiplicand und Multiplicator, und des Ausdrucks, zwei Zahlen werden **mit** oder **in** einander **multiplicirt**.

§. 48.

Bei Buchstaben, wo die Menge der Einheiten beider



Factoren unbestimmt bleibt, kann die Multiplication nur angedeutet werden; dies geschieht durch das Aneinanderrücken der Buchstaben.

Z. B. $a \cdot b = ab = ba$;
$a \cdot (-b) = -ab$;
$(-a \cdot (-b) = ab$.

Ist der eine Factor aber eine bestimmte Zahl, so läßt sich die Multiplication ausführen.

Z. B. $a \cdot 3 = a + a + a = 3a$;
$a \cdot (-3) = (-a) + (-a) + (a -) = -3a$.

Die bestimmte Zahl wird nun also Coefficient des entstehenden Buchstaben-Ausdrucks. (Vergl. §. 29.)

§. 49.

Wird der Multiplicator aus Theilen bestehend angenommen, so muß man mit jedem Theile desselben den Multiplicand multipliciren, und die so erhaltenen einzelnen Producte (Partialproducte) vereinigen.

Denn, in diesem Falle liegt in dem Multiplicator die Andeutung, daß die Einheit auf mehrere verschiedene Arten und zwar auf so viele, als Theile in ihm liegen, gesetzt ist, und die dadurch erhaltenen Größen als Theile vereinigt sind. Dem Begriffe der Multiplication gemäß operirend, wird man daher auf die gegebene Regel kommen.

Beispiele. $a. (b + c) = ab + ac$;
$a. (b - c + d) = ab - ac + ad$;
$(-a) . (b - c - d) = -ab + ac + ad$.

§. 50.

Besteht der Multiplicand aus Theilen, so muß man: jeden Theil desselben mit dem Multiplicator multipliciren, und die dadurch hervorgehenden Partialproducte vereinigen.

Denn, indem der Inbegriff mehrerer Theile auf gewisse Art gesetzt wird, setzt man gleichzeitig jeden Theil desselben

selben eben so, und der Inbegriff davon erscheint als das Resultat des Gesetzten.

Z. B. $(a + b - c) . d = ad + bd - cd.$

Im Falle der Multiplicand eine unbenannte Zahl ist, folgt hieraus und aus der im vorhergehenden §. bewiesenen Regel, die statthafte Verwechselung desselben mit dem Multiplicator, welcher von beiden auch aus Theilen zusammengesetzt seyn mag, und man darf allgemein sagen: **wenn ein Factor aus Theilen besteht, so muß jeder Theil desselben in den andern Factor multiplicirt werden.**

Wenn umgekehrt in jedem Theile einer Größe eine und dieselbe Zahl als Factor liegt, so kann sie als **gemeinschaftlicher** Factor dieser, aus Theilen bestehenden Größe, abgesondert werden.

Es ist z. B. $ab + cb + db = (a + c + d). b.$

§. 51.

Aus den beiden letzten §§. fließt nun auch die Regel für die Multiplication, wenn Multiplicand und Multiplicator **beide** aus Theilen bestehen; sie heißt:

man multiplicire jeden Theil des Multiplicands mit jedem Theile des Multiplicators und vereinige die dadurch entstehenden Partialproducte.

Beispiele. $(a + b) . (c + d) = ac + bc + ad + bd;$ $(a - b + c) . (d - f) = ad - bd + cd - af + bf - cf.$

§. 52.

Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man einen beliebigen seiner Factoren damit multiplicirt, und seine übrigen Factoren, als solche, diesem Resultate wieder beifügt.

Es sey z. B. das Product ab mit der Zahl c zu multipliciren. Da nun die Größe ab bedeutet, daß die Größe a bmal gesetzt ist, (a + a + a + u. s. w.) oder (wegen §.

47.) daß die Größe b amal gesetzt ist (b + b + b + u. s. w.), so geschieht nach §. 50 die Multiplication derselben durch c, indem jeder ihrer Theile dadurch multiplicirt wird; dies giebt mithin:

ac + ac + ac + u. s. w. (bmal) d. h. ac . b. Oder bc + bc + bc + u. s. w. (amal) d. h. bc . a.

Wenn mehr als zwei Factoren in dem gegebenen zu multiplicirenden Producte liegen, so wiederholt sich der Beweis, indem man darin das Factum aus mehreren Factoren vorläufig als einen einzigen Factor ansieht, und ihm so wieder die Form eines aus zwei Factoren bestehenden Products giebt. Z. B.

abcd . n = (abc)d . n = abcn . d
da aber abc . n = (ab)c . n = abn . c,
so ist auch abcn . d = abn . c . d u. s. w.

§. 53.

Eine Größe wird durch ein Product multiplicirt, indem man sie durch jeden Factor desselben in willkürlicher Ordnung multiplicirt.

Es ist a . bc = ab . c = ac . b.

Denn das Product bc, hier Multiplicator, bedeutet:

b + b + b + u. s. w. (cmal) oder
c + c + c + u. s. w. (bmal).

Nach §. 49 muß also auch a bei der ersten Annahme cmal mit b, oder, bei der zweiten Annahme bmal mit c multiplicirt werden; dies giebt

ab + ab + ab + u. s. w. (cmal) d. h. ab . c, oder
ac + ac + ac + u. s. w. (bmal) d. h. ac . b.

Wenn mehr als zwei Factoren in dem Producte, womit multiplicirt werden soll, vorkommen, so ist bei dem Beweise dasselbe zu beobachten, was am Ende des vorigen §. bemerkt ist. Z. B.
a . bcd = a . (bc)d = abc . d = ad . bc = adb . c u. s. w.

Nimmt man den Multiplicand a als unbenannte Zahl

ab), so fließt dieser Satz schon aus dem des vorhergehenden §s durch Verwechselung der Factoren. Es ist

$a \,.\, bc = bc \,.\, a = ba \,.\, c = ca \,.\, b.$

Die Regel dieses §. kann noch so ausgesprochen werden: Es ist einerlei, ob man eine Größe auf einmal durch das Produkt mehrerer Zahlen, oder erst durch den einen Factor desselben, dies Resultat durch den zweiten Factor und sofort multiplicirt.

§. 54.

In den beiden letzten §§. ist in Verbindung mit §. 47 der Beweis des allgemeinen Satzes enthalten, daß das Product aus beliebig vielen Factoren immer dasselbe bleibt, in welcher Ordnung man diese auch in einander multipliciren mag.

Bei drei Factoren a, b, c läßt sich z. B. der Beweis so führen: Wenn der Multiplicand eine unbenannte Zahl ist, so durfte er nach §. 47 mit dem Multiplicator verwechselt werden. Unter dieser Annahme ist daher

$a \,.\, bc = bc \,.\, a$

Es war aber $a \,.\, bc = ab \,.\, c = ac \,.\, b$ (§. 53)

$= ba \,.\, c = ca \,.\, b$ (§. 47)

und $= bc \,.\, a = cb \,.\, a$ (§. 47). Mithin ist

$abc = bca = cba = acb = bac = cab.$

§. 55.

Die Multiplication eines Products durch ein Product geschieht, indem man

sämmtliche Factoren beider in einander in willkürlicher Ordnung multiplicirt. Das Product derselben enthält daher alle Factoren, welche in beiden in einander multiplicirten Producten enthalten sind. $ab \,.\, cd = abcd = acbd$ u. s. w. Den Beweis liefert die Anwendung der Regeln der §§. 53 und 54.

§. 56.

Ein Buchstaben-Ausdruck, welcher einen Coefficienten ne-

ben sich hat, kann als ein Product aus der Zahl, welche den Coefficienten ausmacht, in die Buchstaben-Größe angesehen werden (§. 29); die Multiplication solcher Größen, oder mit solchen, oder einer mit der andern, geschieht mithin nach den so eben abgeleiteten Regeln. Dabei ist zu bemerken: da es willkürlich ist, an welchem Factor eines Products eine Multiplication ausgeführt wird, so multiplicirt man allemal den Coefficienten des Multiplicands mit dem des Multiplicators, und hängt die andern Factoren beider, als solche, diesem Producte in beliebiger Ordnung an.

Folgende Beispiele ergeben darüber das Mehrere:

$$3a \cdot 4 = 12a;$$
$$3a \cdot 4b = 12ab;$$
$$3a \cdot 4ab = 12aab;$$
$$a \cdot 4b = 4ab;$$
$$3ac \cdot 5abc = 15aabcc.$$

§. 57.

Die Multiplication ganz beliebig zusammengesetzter Größen, worin die Theile auch selbst wieder aus Factoren bestehen mögen, ergiebt sich aus der Anwendung der bisher vorgetragenen Sätze, welche auf die allgemeine Regel führt:

jeder Theil des einen Factors wird mit jedem Theile des andern multiplicirt, und dabei ein Product, durch Multiplication eines seiner Factoren, mit einem Producte, durch Multiplication mit jedem Factor desselben; hierauf werden die so erhaltenen einzelnen Producte, jedes mit dem der Regel des §. 46 entsprechenden Zeichen genommen, vereinigt.

§. 58.

Bei Buchstaben-Ausdrücken wird die Vereinigung der, durch die successive Multiplication mehrtheiliger Factoren erhaltenen, Partialproducte im Allgemeinen durch die Verbindung derselben mit ihren Zeichen geschehen. Enthalten aber

Multiplicand und Multiplicator einerlei Buchstaben, so entstehen durch die wechselseitige Multiplication ihrer Theile in einander gleichnamige Partialproducte, welche demnächst wirklich vereinigt werden müssen. — Das übliche Verfahren bei der Berechnung des Products solcher mehrtheiliger Factoren, um die gleichnamigen Partialproducte zu ihrer Vereinigung in einer Vertical-Reihe zu erhalten, zeigen nachfolgende Exempel, wobei Multiplicand und Multiplicator zuerst in ihren einzelnen Theilen auf einerlei Art geordnet, und dann in zwei Horizontal-Reihen untereinander gesetzt sind.

I.

$$\begin{array}{l}
2a - 2b + 3c \\
4a + b - 2c \\
\hline
8aa - 8ab + 12ac \\
\qquad + 2ab - 2bb + 3bc \\
\qquad\qquad - 4ac + 4bc - 6cc \\
\hline
8aa - 6ab - 2bb + 8ac + 7bc - 6cc.
\end{array}$$

II.

$$\begin{array}{l}
4a - 3ab - 4b + c \\
3a - 2ab - 2b \\
\hline
12aa - 9aab - 12ab + 3ac \\
\qquad - 8aab + 6aabb + 8abb - 2acb \\
\qquad\qquad - 8ab + 6abb + 8bb - 2bc \\
\hline
12aa - 17aab + 6aabb - 20ab + 3ac + 14abb - 8bb - 2acb - 2bc.
\end{array}$$

III.

$$\begin{array}{l}
5n + 3m - 2h \\
2n - 4m \\
\hline
10nn + 6nm - 4hn \\
\qquad - 20nm - 12mm + 8mh \\
\hline
10nn - 14nm - 4hn - 12mm + 8mh
\end{array}$$

§. 59.

Die Multiplication vielziffriger Zahlen, als aus Theilen bestehender Größen, stützt sich auf die Regel des §. 57. Es ist wichtig, darüber noch Folgendes zu bemerken:

Das Product von zwei oder mehreren höhern Einheiten ist wieder eine höhere Einheit, im Range so hoch, als die Ränge der multiplicirten zusammengenommen; denn jede höhere Einheit enthält, wie aus der Erklärung des §. 18, wenn man dort den Begriff von Factor zuzieht, leicht folgt, die Grundzahl so oft als Factor, als ihr Rang angiebt; durch die Multiplication zweier Producte entsteht aber ein Product, worin sämmtliche Factoren wieder erscheinen (§. 55). Die Multiplication höherer Einheiten in einander geschieht demnach durch Addition ihrer Ordnungen.

Nun stehen nach §. 34 die Ziffern einer vielziffrigen Zahl als Coefficienten neben ihrem Range entsprechenden höhern Einheiten; wird also mit einer solchen Ziffer multiplicirt, so muß auch noch mit dieser höhern Einheit multiplicirt werden (§. 53), welches durch Addition des Ranges der letztern zu dem der zu multiplicirenden Ziffer geschieht. Die Ziffern des Multiplicands behalten mithin ihren Rang, wenn er mit einer einfachen Zahl, d. h. einer Ziffer der Ordnung 0, multiplicirt wird; wobei durch das Uebertragen gewisser Einheiten, deren Menge durch die Multiplication ein oder mehrere Male gleich der Grundzahl geworden, zu denen der nächst höhern Ordnung, im Producte eine Ziffer mehr, als im Multiplicand entstehen, oder der Rang des Products um eins höher, als der des Multiplicands werden könnte. Werden die einzelnen Ziffern des letztern ferner aber mit einer Ziffer von gewissem Range multiplicirt, so erhöht dieses die Ordnung jeder um so viel Grade, als der Rang dieser Einheiten

enthält. — Hierauf gründet sich das mechanische Multiplications-Verfahren in der Rechenkunst.

Beispiele für die Multiplication vielziffriger Zahlen im decadischen und andern Zahlensystemen.

§. 60.

Der Rang des Products zweier vielziffriger Zahlen kann höchstens eins höher, als die Summe der Ordnungen dieser Zahlen, seyn. Denn nimmt man für jede Zahl eine höhere Einheit, deren Rang eins höher, als der dieser Zahl, ist, so wird das Product derselben um zwei höher, als die Ordnungen jener beiden Zahlen zusammengenommen, und als eine höhere Einheit, die kleinste Zahl von eben dem Range, dabei jedoch größer als das Product der letztern beiden seyn. Dieses kann also keinen Rang erreichen, der um zwei höher, als die Summe ihrer Ordnungen wäre.

Z. B. Das Product der Zahlen 999 und 9999 ist kleiner, als das von 1000 und 10000, und letzteres die kleinste Zahl vom 7ten Range, jenes kann also nicht den 7ten Rang erreichen.

§. 61.

Wenn eine benannte Zahl multiplicirt wird, so erhält das Product aus ihrer absoluten Zahl in den Multiplicator wiederum dieselbe Benennung (§. 43). Besteht in diesem Falle der Multiplicand aus Theilen verschiedener Benennung, so kann man sie sämmtlich vor der Ausführung der Multiplication auf den niedrigsten Namen reduciren; oder man multiplicirt sie einzeln, und zieht aus den Partialproducten durch die umgekehrte Reduction die etwaigen Einheiten eines höhern Namens wieder heraus, und vereinigt dann die entstandenen gleichnamigen mit einander. (Vergl. §. 35 nebst zugehöriger Anmerk.)

Division.

§. 62.

Bei der Division werden zwei Zahlen gegeben, wovon die eine, der **Dividendus**, angesehen wird, als entstanden durch die Multiplication der andern, des **Divisors**, mit einer unbekannten, dem **Quotienten**, welche durch diese Operation bestimmt werden soll.

Das Zeichen der Division ist ein Colon (:), zwischen Dividend und Divisor so gesetzt, daß ersterer vorangeht.

Die Division ist das Umgekehrte der Multiplication, indem sie eine vorhergegangene Multiplication in einer Zahl (dem Dividend) wieder aufhebt, und diejenige darstellt, welche mit einer bestimmten (dem Divisor) multiplicirt, jene hervorbrachte.

Wenn also $a : b = c$ ist, so muß
$a = b \cdot c$ seyn.

Dieser Satz: daß das Product aus dem Divisor in den Quotienten allemal dem Dividend gleich ist, — dient sowohl zur Ableitung der Regeln für die Division, als auch zur Probe der richtigen Bestimmung des Quotienten.

§. 63.

Eine unmittelbare Folgerung aus obiger Erklärung ist: wird eine Zahl durch eine andere multiplicirt, und darauf das Product durch eine dieser beiden Zahlen dividirt, so entsteht die zweite als Resultat.

In allgemeinen Zeichen drückt man diesen Satz so aus:
Wenn $a \cdot b = c$, so ist
$c : a = b$ und
$c : b = a$.

§. 64.

1. Nimmt man unbenannte Zahlen zu Dividend

und Divisor an, so ist es einerlei, ob man bei der Bildung des erstern, als ein Product aus Divisor in den Quotienten, welcher dann auch unbenannt seyn muß, diesen oder jenen als Multiplicator ansehen will, (§. 47).

2. Sind aber Dividend und Divisor benannte Zahlen, so ist klar, daß der Quotient unbenannt, und daher Multiplicator bei jener Erzeugung des Dividends gewesen ist. — In diesem Falle, in welchem Dividend und Divisor zwei gleichbenannte Zahlen seyn müssen, (§. 43. §. 61) erscheint die Division als eine Vergleichung zweier gleichartiger Größen, indem durch die Bestimmung des Quotienten die Art angegeben wird, wie die eine (der Divisor) zu setzen ist, um die andere (den Dividend) hervorzubringen.

3. Ist endlich der Dividend benannt, der Divisor unbenannt, so muß der Quotient dieselbe Benennung erhalten, die der Dividend hat, damit das Product aus dem Quotienten in den unbenannten Divisor dem Dividend gleich werde; und nun ist er also Multiplicand bei der Bildung des Dividends gewesen. Alsdann darf die Division eine Eintheilung in gleiche Theile genannt werden; denn der Quotient erscheint als diejenige Größe, welche so viele Male als Theil gesetzt, wie der Divisor angiebt, den Dividend hervorbringt.

Den Dividend unbenannt und den Divisor benannt anzunehmen, hat keinen Sinn, da jener ein Product aus diesem und einer andern Zahl seyn soll, also die Benennung des Divisors wieder erhalten muß.

§. 65.

Aus den Betrachtungen des vorigen §. ergiebt sich, daß, wenn Dividend und Divisor beide unbenannte Zahlen sind, die Division eben so wohl als eine Vergleichung zweier Zahlen, als auch als eine Eintheilung einer Zahl (des Dividends)

in gleiche Theile angesehen werden kann. Daß sie indessen ausschließlich eine Vergleichung ist, wenn beide benannte Zahlen einerlei Art sind; und daß sie endlich ausschließlich als eine Eintheilung in gleiche Theile auftritt, wenn der Dividend benannt und der Divisor unbenannt ist. Umgekehrt entspricht aber immer Eintheilung einer Größe in gleiche Theile: Division derselben durch die Zahl, welche die Anzahl der gleichen Theile, worin sie zerlegt werden soll, angiebt.

§. 66.

Um die Regeln für die Ausführung der Division abzuleiten, müssen verschiedene Fälle des Größen-Verhältnisses zwischen Dividend und Divisor berücksichtigt werden.

Der einfachste Fall ist der, worin der Dividend größer als der Divisor und zugleich so angenommen wird, daß ersterer durch wiederholtes Abziehen des letztern erschöpft werden kann. Dann ist der Quotient die Zahl, welche angiebt, wie vielmal dies Abziehen geschehen konnte, es mögen Dividend und Divisor unbenannte oder beide gleichbenannte Zahlen seyn; denn diese Zahl zeigt offenbar auch an, wie oft der Divisor gesetzt werden müßte, um den Dividend hervorzubringen, und leistet so der Bedingung ein Genüge, welcher der Quotient unterworfen ist.

Ist aber der Dividend benannt, der Divisor unbenannt, und läßt sich ersterer in so viele gleiche Theile zerlegen, als letzterer Einheiten enthält, so ist ein solcher Theil der gesuchte Quotient; denn indem man diesen so viel mal nimmt, als der Divisor Einheiten enthält, geht wiederum der Dividend hervor, wie es verlangt wird. Die Auffindung der Größe eines solchen Theils, worin der Dividend zerlegt werden soll, kann aber, wie vorhin durch wiederholtes Abziehen des Divisors vom Dividend geschehen, wenn man dabei augenblicklich

von der Benennung des letztern absieht, d. h. ihn nur auf seine absolute Größe betrachtet.

Bei einfachen Zahlen ist die Größe des Quotienten für diese Annahme des Größen-Verhältnisses von Dividend und Divisor durch das Einmaleins bekannt; z. B.

8 : 2 = 4 denn 2 . 4 = 8;

6 rthl. : 3 = 2 rthl. denn 2 rthl. . 3 = 6 rthl.

§. 67.

Ist der Dividend kleiner als der Divisor, so ist der Quotient einem Bruche gleich, welcher den Dividend zum Zähler, den Divisor zum Nenner hat. Dies wird auf folgende Art bewiesen:

1. Für den Fall, daß Dividend und Divisor unbenannte oder beide gleichbenannte Zahlen sind, der Quotient mithin als Multiplicator des Products aus ihm in den Divisor, welches gleich dem Dividend seyn soll, angenommen werden darf. Es ist klar, daß der Quotient hier keine ganze Zahl seyn kann, da die Multiplication mit einer solchen, mehrmaliges Setzen fordert, und durch mehrmaliges Setzen des Divisors der Dividend, als etwas Kleineres als jener, nicht hervorgebracht wird. Zerlegt man aber den Divisor in so viele gleiche Theile, als er Einheiten enthält, d. h. nimmt man seine Einheit selbst, und setzt diese so oft, als sie der Dividend enthält, so entsteht dieser aus jenem; und gerade solche Operationen werden, dem allgemeinen Begriffe der Multiplication gemäß, mit dem Divisor vorzunehmen seyn, wenn man ihn mit einem Bruche multiplicirt, welcher ihn selbst zum Nenner, zum Zähler den Dividend hat. Denn dieser Bruch entstand aus der Einheit durch Zerlegung derselben in so viele gleiche Theile, als sein Nenner, und so oftmalige Wiederholung eines derselben, als sein Zähler anzeigt; mit ihm multipliciren heißt aber, eben so mit dem Multiplicand verfahren, wie man bei

seiner Erzeugung mit der Einheit verfuhr; daher ist der gesuchte Quotient dieser Bruch. Z. B.

$$5 : 8 = \frac{5}{8}, \text{ denn es wird}$$

$$8 \cdot \frac{5}{8} = 5;$$

$$5 \text{ rthl.} : 8 \text{ rthl.} = \frac{5}{8}, \text{ indem}$$

$$8 \text{ rthlr.} \cdot \frac{5}{8} = 5 \text{ rthl. wird.}$$

2. Ist der Dividend eine benannte, der Divisor eine unbenannte Zahl; soll also der Quotient als ein Multiplicand eines gegebenen Multiplicators gesucht werden, um aus ihnen ein angenommenes Product zu bilden, so kann der Quotient nur ein gewisser Theil des Dividends seyn, damit dieser aus jenem durch so vielmaliges Setzen, als der Divisor Einheiten hat, wiederum entsteht; ebendeshalb wird nur verlangt den Dividend in so viele gleiche Theile zu zerlegen, als Einheiten im Divisor liegen, um die Größe des Quotienten zu bekommen. Man kann nun aber diese Zerlegung des Dividends offenbar auch an jeder Einheit desselben vornehmen, und die daraus hervorgehenden einzelnen Stücke wieder zu einem Inbegriffe vereinigen: die Einheit in so viele gleiche Theile zerfällen, als eine Zahl angiebt, heißt aber: einen Bruch darstellen, welcher 1 zum Zähler, und diese Zahl zum Nenner hat; und das mehrmalige Setzen einer solchen Größe wird durch Wiederholung der Einheit in dem Zähler ausgedrückt (§. 10). Demnach entsteht für den geforderten Quotienten wieder ein Bruch, dessen Nenner der Divisor, dessen Zähler die Menge der Einheiten des Dividends ist. — Hieraus folgt zugleich, daß jeder Bruch eine Größe ist, welche einen eben so großen Theil von seinem Zähler ausmacht, als die Einheit von seinem Nenner.

Es ist z. B. 5 ℛ : 8 = $\frac{5}{8}$ ℛ, oder durch $\frac{5}{8}$ ℛ wird der 8te Theil von 5 ℛ ausgedrückt, denn von jedem einzelnen Thaler stellt $\frac{1}{8}$ ℛ den achten Theil dar, und dieses muß 5 mal gesetzt werden, um ihn von allen 5 Thalern zu bekommen. Umgekehrt wird also $\frac{5}{8}$ ℛ durch 8maliges Setzen wieder 5 ℛ hervorbringen, d. h. es ist $\frac{5}{8}$ ℛ . 8 = 5 ℛ.

Die Division mag demnach als eine Vergleichung zweier gleichartiger Größen, oder als eine Eintheilung in gleiche Theile erscheinen, so gilt doch immer der im Anfange dieses §. ausgesprochene Satz.

§. 68.

Es ist sehr wichtig, daß sich derselbe Satz auch auf den Fall ausdehnen läßt, worin der Dividend größer als der Divisor ist, so daß ganz allgemein:

der Quotient zweier Zahlen immer durch einen Bruch ausgedrückt werden darf, welcher den Divisor zum Nenner, den Dividend zum Zähler hat.

Denn der im vorigen §. geführte Beweis bleibt sich gleich, wie man dabei auch die gegenseitige Größe von Dividend und Divisor annehmen mag. In Zeichen:

es ist $a : b = \frac{a}{b}$. Denn, will

man erstlich die Division als eine Vergleichung ansehen, soll also der Quotient Multiplicator bei der Bildung des Dividends, als ein Product aus ihm in den Divisor, gewesen seyn, so ist wirklich $b \cdot \frac{a}{b} = a$; da bei der Multiplication der Größe b mit $\frac{a}{b}$ vorgeschrieben wird: diese Größe b selbst

in b gleiche Theile zu zerlegen, welches die Einheit giebt; und einen solchen dann a_{mal} zu setzen, wodurch a entsteht, — wie die Gründe davon unter Nr. 1 des vorigen §. näher dargethan sind. Soll aber zweitens, die Division eine Eintheilung in gleiche Theile seyn, so entspricht der Bruch $\frac{a}{b}$ einem eben so großen Theile von a, als es die Einheit von b ist, wie in Nr. 2 des vorigen §. erklärt ist.

§. 69.

Hierdurch ist nun auch das Divisions-Verfahren bei einem dritten denkbaren Falle des Größen-Verhältnisses zwischen Dividend und Divisor vorbereitet und bewiesen; der nämlich, worin der Dividend zwar größer als der Divisor ist, sich aber nicht durch wiederholtes Abziehen des letztern völlig erschöpfen läßt: der Quotient wird alsdann in einem Bruche dargestellt, welcher den Divisor zum Nenner, den Dividend zum Zähler bekommt.

Z. B. $15 : 4 = \frac{15}{4}$.

Will man indessen den als Bruch geschriebenen Quotienten in diesem Falle weiter auflösen, so entsteht eine Verbindung der in §. 66 und §. 67 gegebenen Vorschriften für die Bestimmung des Quotienten. Nachdem nämlich der Divisor mehrere Male gesetzt ist, wird hier dies Product nicht genau gleich dem Dividend, und zwar so, daß noch ein Stück des letztern übrig bleibt, welches kleiner ist als der Divisor, weshalb gerade dieser nicht ganz noch einmal gesetzt werden durfte. Oder, welches einerlei ist, nachdem der Divisor wiederholte Male vom Dividend abgezogen ist, bleibt ein Theil des letztern übrig, welcher kleiner als der Divisor ist, wovon dieser also nicht nochmals weggenommen werden kann. Man pflegt diesen Theil des Dividends den Rest bei der Division

zu nennen. Da auch er noch dividirt werden muß, so verfährt man dabei nach §. 67, so daß nun der vollständige Quotient jene ganze Zahl wird, (welche zeigt, wie oft der Divisor selbst gesetzt war), wozu noch ein Bruch addirt ist, welcher den Rest zum Zähler, den Divisor zum Nenner hat; z. B.

$$15 : 4 = 3 + \frac{3}{4}.$$

§. 70.

Wenn einfache Größen durch Buchstaben ausgedrückt sind, die Größe von Dividend und Divisor also ganz unbestimmt bleibt, kann die Division derselben nur angedeutet werden. Gewöhnlich schreibt man dabei für den Quotienten die mehr erwähnte Bruchsgestalt, und setzt daher z. B.

$$a : b = \frac{a}{b}.$$

§. 71.

Um den Quotienten in Absicht seines positiven oder negativen Werths aus denen von Dividend und Divisor zu bestimmen, dient die Regel:

Gleiche Zeichen des Dividends und Divisors geben einen positiven, ungleiche Zeichen derselben einen negativen Quotienten.

Der Beweis dafür folgt leicht aus der Erklärung des Quotienten, als einer Zahl, die mit einer gegebenen multiplicirt, ein gegebenes Product hervorbringen soll: es ist hier daher das Zeichen des Products, so wie das des einen Factors bekannt; das des andern Factors muß mithin nach §. 46 bestimmt werden, welches auf die obige Regel führt. Man hat darnach:

$$a : b = + \frac{a}{b};$$

$$a : (-b) = -\frac{a}{b};$$

$$(-a) : b = -\frac{a}{b};$$

$$(-a) : (-b) = +\frac{a}{b}.$$

§. 72.

Soll eine Größe durch eine andere, und dann durch eine dritte dividirt werden, so muß der durch die erste Division erhaltene Quotient durch jene dritte Größe dividirt werden; da aber eine zweimalige Multiplication auch dadurch geschehen konnte, daß man auf einmal durch das Product beider Größen multiplicirte, wodurch nach und nach multiplicirt werden sollte (§. 53), so kann auch, anstatt der zweimaligen Division, auf einmal durch das Product beider Größen dividirt werden. Denn durch die Division soll die Multiplication wieder aufgehoben werden, welches sowohl auf die eine als auf die andere Art geschieht. Da ferner die Ordnung, in welcher mehrmalige Multiplication geschah, beliebig war, so darf man auch hier erst durch die dritte und dann durch die zweite Größe dividiren. Es ist daher $(a : b) : c = \frac{a}{b} : c$, oder auch

$$= \frac{a}{c} : b = \frac{a}{bc}.$$

Hierin ist also der Satz enthalten:

durch ein Product wird dividirt, wenn man erst durch den einen seiner Factoren, dann durch den andern u. s. w. in willkürlicher Ordnung dividirt.

§. 73.

Wird dagegen der Dividend als ein Product angenommen,

nommen, so geschieht die Division desselben durch Division eines beliebigen seiner Factoren.

Denn umgekehrt ward die Multiplication des Products schon durch Multiplication eines, und zwar eines beliebigen seiner Factoren ausgeführt (§. 52). In Zeichen: es ist

$$(ab) : c = \frac{a}{c} b = a \cdot \frac{b}{c}.$$

Man nimmt in einem solchen Falle die Division an demjenigen Factor des Products vor, woran es am einfachsten geschehen kann; wenn also einer davon ein Vielfaches des Divisors ist, so wird man diesen dividiren. — Ist ein mit einem Coefficienten versehener Buchstaben-Ausdruck durch eine bestimmte Zahl zu dividiren, so wird die Division allemal an dem Coefficienten desselben vollzogen.

Z. B. $6a : 3 = 2a$

$5a : 8 = \frac{5}{8}a.$

§. 74.

Die Verbindung der in den beiden letzten §§. aufgestellten Sätze zeigt zugleich, wie ein Product durch ein Product dividirt wird, wie es folgende Beispiele näher ergeben:

$$6a : 3b = \frac{2a}{b};$$

$$8ac : 5bc = \frac{8a}{5b};$$

$$8aa : 2a = 4a;$$

$$8aa : 2ab = \frac{4a}{b}.$$

Es geht daraus die Regel hervor:

man lasse aus dem Dividend alle Factoren weg, die zugleich im Divisor liegen, die in jenem übrigbleibenden setze man als Zähler, die in diesem noch bleibenden als Nenner eines Bruchs, welcher die Größe des Quotienten ausdrückt.

Bleiben dabei keine Factoren im Divisor übrig, d. h. haben sich seine Factoren sämmtlich gegen gleiche im Dividend gehoben, so sagt man, der Divisor sey in dem Dividend (oder auch die Division selbst) sey aufgegangen; und der Quotient ist dann eine ganze Zahl.

§. 75.

Besteht der Dividend aus mehreren Theilen, so muß jeder Theil desselben durch den Divisor dividirt werden; denn alsdann werden die Partialproducte aus dem Divisor in die einzelnen Theile des so erhaltenen Quotienten, die sämmtlichen Theile des Dividends wieder geben, wie es die Division erfordert.

Beispiele. $(a + b) : c = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$;

$(a - b - c) : d = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$;

$(8aa - 2ab + 6ac - 4ad) : 2a = 4a - b + 3c - 2d$;

$(6aab + 5ab - 9bb + 3c) : 3ab = 2a + \frac{5}{3} - \frac{3b}{a} + \frac{c}{ab}$.

§. 76.

Wird aber der Divisor als aus Theilen bestehend angenommen, so muß der Dividend durch den Inbegriff aller dieser Theile dividirt werden.

Diese Regel bedarf keines Beweises, weil dadurch der geforderten Operation unmittelbar ein Genüge geleistet wird. Indessen wird es nützlich seyn zu bemerken, daß man die Division im obigen Falle nicht etwa dadurch ausführen kann, daß man den Dividend durch jeden Theil des Divisors dividirte; denn nach der Erklärung der Division wird dabei eben so wenig verlangt, eine Vergleichung des Dividends mit den einzelnen Theilen des Divisors vorzunehmen, als ihn nach und nach in gleiche Theile zu zerlegen, deren Anzahl respective den Theilen des Divisors gleich kämen.

Bei Buchstaben-Größen, wo die wirkliche Vereinigung der Theile des Divisors selten zulässig ist, bleibt daher gewöhnlich nur die Andeutung des Quotienten in Bruchsgestalt übrig, (vergl. §. 70.) indem man dabei jene Regel befolgt. Hiernach wird z. B.

$$a : (b + c) = \frac{a}{b+c};\ 8a : (3b - c + d) = \frac{8a}{3b-c+d};$$

$$(a + b) : (c + d) = \frac{a}{c+d} + \frac{b}{c+d}.$$

§. 77.

Nimmt man nun zu Dividend und Divisor beliebige zusammengesetzte Größen an, so kann der Quotient durch Anwendung aller im Vorhergehenden gegebenen Regeln bestimmt werden. —

Bei Buchstaben-Ausdrücken ist dabei, wenn die Division nicht in einer bloßen Andeutung des Quotienten durch die Bruchsgestalt bestehen soll, noch Folgendes zu bemerken. Ist nämlich der Divisor wirklich ein Factor des Dividends, oder doch wenigstens letzterer zum Theil (beinahe) gleich einem Vielfachen des Divisors, so ist klar, daß bei Buchstaben-Größen, wo die Factoren immer sichtbar bleiben, Dividend und Divisor aus Theilen bestehen müssen, worin einerlei Buchstaben als Factor vorkommen; in denen des erstern mögen außerdem noch andere Factoren liegen; denn der Dividend muß alsdann die sämmtlichen Partialproducte enthalten, die durch die Multiplication des Quotienten mit dem Divisor entstehen, und mithin diesem ähnlich gebauet seyn. — Bei andern Formen, welche diesen Bedingungen nicht unterworfen sind, kann der Quotient, wie im vorigen §. gezeigt ist, nur angedeutet werden. Für jenen Fall aber geschieht die Ausmittelung des Quotienten dadurch, daß man untersucht, wie oft sich der Divisor oder ein Vielfaches desselben vom Divi-

dend abziehen läßt. — Man verfährt hierbei folgendermaßen: man ordnet zuerst Dividend und Divisor in ihren Theilen so, daß in beiden die einerlei Buchstaben enthaltenden auf gleiche Weise einander folgen, und daß dabei die Theile, worin der Buchstab, nach dem man ordnet, mehrere Male als Factor vorkommt, nach der Anzahl dieser Factoren, in abnehmender Ordnung hingeschrieben werden. In den Theilen selbst ist es am bequemsten, dieselben Buchstaben in allen auch auf gleiche Weise folgen zu lassen; die Coefficienten gehen wie immer voran, und dann pflegen die Factoren zu kommen, welche durch den Buchstaben bezeichnet sind, nach dem man die Theile ordnet. Die Form einer solchen Anordnung ist z. B., wenn a den Buchstaben bedeutet, der ihr zum Grunde liegt:

$$6aaa + 8aab - 5abc + 3cd.$$

Hierauf dividirt man den höchsten Theil (d. h. den ersten zur Linken) des Dividends durch den höchsten des Divisors, so erhält man den ersten Theil des Quotienten; multiplicirt aber mit ihm den vollständigen Divisor, und zieht dies Product vom Dividend ab. Mit dem Rest, — den man immer wieder eben so ordnet, wie vorher Dividend und Divisor, — verfährt man zur Entdeckung des zweiten Theils des Quotienten wie vorhin, und setzt dies fort, bis entweder kein Rest mehr bleibt, oder ein solcher den Buchstaben, nach welchem geordnet ist, nicht weiter enthält; denn nun kann dieser kein Vielfaches des Divisors mehr seyn. In diesem Falle muß dem bis dahin gefundenen Quotienten noch ein Bruch angehängt werden, welcher jenen Rest zum Zähler, den Divisor zum Nenner hat. (§. 69.)

Anmerk. Bei dem angezeigten Divisions-Verfahren muß hier jedoch vorausgesetzt werden, daß die einzelnen Divisionen des höchsten Theils des Divisors in den des Dividends keine Brüche zu Quotienten geben, da man sonst, bei Anwendung der weitern Regeln, Brüche multipliciren und subtrahiren

müßte, für welche Operationen noch keine Vorschriften gegeben sind. Ueberhaupt kann die Division zusammengesetzter Buchstaben-Ausdrücke erst in der höhern Algebra allgemeiner und vollständiger behandelt werden.

Für die Berechnung des Quotienten, so weit sie hier schon verständlich ist, mögen folgende Exempel dienen. Der Dividend ist dabei in die erste Horizontal-Reihe geschrieben; von ihm durch einen Vertical-Strich getrennt, steht rechts der Divisor, und unter demselben, durch einen Horizontal-Strich geschieden, der Quotient.

$$
\text{I.}\quad
\begin{array}{l|l}
8aa - 14ab - 6ad + 3bb + 9bd & 2a - 3b \\
\cline{2-2}
8aa - 12ab & 4a - b - 3d \\
- \quad + & \\
\hline
\quad - 2ab - 6ad + 3bb + 9bd & \\
\quad - 2ab + 3bb & \\
\quad + \quad\; - & \\
\cline{1-1}
\qquad - 6ad + 9bd & \\
\qquad - 6ad + 9bd & \\
\qquad + \quad\; - & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$
\text{II.}\quad
\begin{array}{l|l}
15xx + 7xy + 18xz - 2yy + 12yz & 3x + 2y \\
\cline{2-2}
15xx + 10xy & 5x - y + 6z \\
- \quad - & \\
\hline
\quad - 3xy + 18xz - 2yy + 12yz & \\
\quad - 3xy - 2yy & \\
\quad + \quad\; + & \\
\cline{1-1}
\qquad 18xz + 12yz & \\
\qquad 18xz + 12yz & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

III.

$$
\begin{array}{l|l}
3aa + 10ab - 8bb + 2ac + 22bc - ad - 4bd - 5cc + dc & a + 4b - c \\
\underline{3aa + 12ab - 3ac} & \overline{3a - 2b + 5c - d} \\
\quad - \;\; - \;\; + & \\
\quad - 2ab - 8bb + 5ac + 22bc - ad - 4bd - 5cc + dc & \\
\quad \underline{- 2ab - 8bb + 2bc} & \\
\quad + \;\; + \;\; - & \\
\qquad 5ac + 20bc - ad - 4bd - 5cc + dc & \\
\qquad \underline{5ac + 20bc - 5cc} & \\
\qquad - \;\; - \;\; + & \\
\qquad\quad - ad - 4bd + dc & \\
\qquad\quad \underline{- ad - 4bd + dc} & \\
\qquad\quad + \;\; + \;\; - & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

IV.

$$
\begin{array}{l|l}
8aaa - 8aab + 12ab + 2abb - 4ac - 6bb + 5bc & 4a - 2b \\
\underline{8aaa - 4aab} & \overline{2aa - ab + 3b - c} \\
\quad - \;\; + & \\
\quad - 4aab + 12ab + 2abb - 4ac - 6bb + 5bc & \\
\quad \underline{- 4aab + 2abb} & \\
\quad + \;\; - & \\
\qquad 12ab - 4ac - 6bb + 5b & \\
\qquad \underline{12ab - 6bb} & \\
\qquad - \;\; + & \\
\qquad\quad - 4ac + 5bc & \\
\qquad\quad \underline{- 4ac + 2bc} & \\
\qquad\quad + \;\; - & \\
\qquad\qquad 3bc \text{ (Rest)} &
\end{array}
$$

Der vollständige Quotient ist mithin in diesem letzten Beispiele

$$2aa - ab + 3b - c + \frac{3bc}{4a-2b}.$$

§. 78.

Das Verfahren bei der Division vielziffriger Zahlen beruht auf den so eben für diese Operation bei zusammengesetzten Buchstaben-Ausdrücken abgeleiteten Regeln, und stimmt daher im Wesentlichen mit dem im vorigen §. angezeigten Verfahren überein. — Dividend und Divisor sind hier schon geordnet, da in beiden die einzelnen Ziffern nach der höchsten Zahl der der Grundzahl gleichen Factoren, vor denen sie als Coefficienten stehen, auf einander folgen. Die Aufsuchung der einzelnen Theile des Quotienten geschieht daher sogleich durch Division des höchsten Theils des Divisors in einen vom Dividend so hoch genommenen, daß ersterer darin enthalten ist (mithin durch eine einfache in eine höchstens zweiziffrige Zahl); wie vielmal er darin enthalten ist, bestimmt sich durch Hülfe des Einmaleins. Aus dem, was für den Rang des Products bei vielziffrigen Zahlen §. 59 bewiesen ist, ergiebt sich leicht, daß der Rang des so erhaltenen höchsten Theils des Quotienten so hoch ist, als der Rang des Dividends, weniger dem des Vielfachen aus dem Divisor in diesen Theil. Nachdem das Product des Divisors in den höchsten Theil des Quotienten, dem hiernach bestimmten Range des letztern gemäß, berechnet ist, wird es vom Dividend abgezogen, und mit dem Reste zur Bestimmung der übrigen Theile des Quotienten wie vorher verfahren. Dies setzt man fort bis entweder kein Rest mehr bleibt, oder ein solcher kleiner als der Divisor ist. Im letzten Falle wird dem bis dahin gefundenen Quotienten ein Bruch beigefügt, dessen Nenner der Divisor, dessen Zähler dieser Rest ist (§. 69).

Nähere Erläuterung des Divisions-Verfahrens bei vielziffrigen Zahlen durch Beispiele aus dem decadischen und andern Zahlensystemen.

§. 79.

Wenn eine **benannte** Zahl durch eine **unbenannte** dividirt werden soll, so ändert sich das Verfahren zur Entdeckung des Quotienten nicht, wie aus §. 66 erhellt; dem Quotienten wird demnächst die Benennung des Dividends wieder beigelegt. Enthält dieser dabei Theile verschiedener Benennung, so reducirt man sie gewöhnlich auf die Einheit des niedrigsten Namens, und vereinigt sie vor der Ausführung der Division; weil in den meisten Fällen dadurch desto mehr vermieden wird, daß der Quotient, oder einzelne Theile desselben, in Bruchsgestalt erscheinen.

Sind Dividend und Divisor beide **benannte** Zahlen von einerlei Art, so müssen sie nothwendig zuvörderst auf gleiche Benennung gebracht werden, um dann durch die Division der dadurch für sie erhaltenen absoluten Zahlen die geforderte Vergleichung wirklich anstellen zu können, und in dem Quotienten das Resultat derselben anzugeben. (§§. 64. 66).

Beispiele für die Division in benannten Zahlen. — Practische Regeln, um in verschiedenen Fällen dabei auf die kürzeste Art zu rechnen. — Verbindung mit der Multiplication solcher Zahlen. —

Viertes Capitel.

Eigenschaften der ganzen Zahlen, hinsichtlich ihrer Theiler, und dahingehörige Aufgaben.

---

§. 80.

Diejenige ganze Zahl, durch welche sich eine andere ohne Rest dividiren läßt, heißt ein **Theiler** der letztern, oder diese durch jene **theilbar**. Die etwaigen Theiler einer Zahl

muß dieselbe mithin als Factoren enthalten. Die Einheit ist offenbar ein Theiler jeder Zahl, denn, weil die Multiplication mit ihr eine Zahl unverändert läßt, so kann man sie in jeder als Factor annehmen. Aus demselben Grunde ist jede Zahl durch sich selbst theilbar, indem durch diese Division wieder der Factor 1 hervorgeht.

§. 81.

In der Reihe der natürlichen Zahlen, worunter man die beliebig weit fortzusetzende Reihe der um eine Einheit verschiedenen ganzen Zahlen von 1 an versteht, also: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 u. s. w. giebt es einige, welche durchaus keinen andern Theiler, als die Einheit und sich selbst haben, die eben deshalb nicht durch die Multiplication gewisser anderer ganzer Zahlen entstanden, angesehen werden können. Solche Zahlen heißen Primzahlen, auch, wegen eines ferner noch eingeführten Ausdrucks (vergl. §. 86), absolute Primzahlen. Im Gegensatze werden die ganzen Zahlen, welche durch andere theilbar, oder in Factoren anderer ganzer Zahlen zerlegbar sind, zusammengesetzte Zahlen genannt.

Die Reihe der Primzahlen ist:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 u. s. w.

Diese Zahlen stehen bald um mehrere, bald um wenigere Einheiten von einander ab, und man kann kein Gesetz in ihrem Fortlaufe entdecken. Die zwischen ihnen liegenden Zahlen 4, 6, 8, 9, 10, 12 u. s. w. sind der Reihe nach die zusammengesetzten.

Anmerkung. Bei mehreren Rechnungs-Operationen ist es erforderlich, zu bestimmen, ob eine Zahl eine Primzahl, oder eine zusammengesetzte sey, und was für Zahlen im letztern Falle ihre Theiler seyn würden, oder ob eine gewisse Zahl in einer andern aufgehe, oder nicht. Einige Sätze, welche diese Untersuchung erleichtern, und die schon an dieser Stelle

abgeleitet werden können, sind in den beiden nächsten §§. aufgestellt; sie finden außerdem in der Folge vielfältige Anwendung.

§. 82.

Wenn die Division einer ganzen Zahl durch eine andere aufgehen, d. h. zum Quotienten wiederum eine ganze Zahl geben soll, so folgt aus der Erklärung der Division, daß die erstere die zweite als Factor enthalten muß. Liegen also im Divisor mehrere Factoren, so ist es, damit die Division aufgehe, nothwendig, daß auch alle diese Factoren im Dividend vorkommen. (Vergl. §. 74). Sobald also eine Zahl in einfache Factoren (Primzahlen) zerlegbar ist, welche nicht sämmtlich als Factoren in einer andern liegen, so kann sie in diese nicht theilbar seyn. Auch erhellet hieraus, daß eine Primzahl nicht Theiler einer zusammengesetzten Zahl seyn kann, wenn sie keinen Factor derselben ohne Rest dividirt.

§. 83.

1. Wenn eine Zahl durch das Product mehrerer anderer theilbar ist, so ist sie es auch durch jeden Factor dieses Products.
   Denn anstatt durch das Product gewisser Zahlen zu dividiren, konnte man durch jeden Factor desselben die Division in beliebiger Ordnung nach und nach ausführen (§. 72); wenn nun im ersten Falle der Quotient eine ganze Zahl ward, so muß auch das Resultat der letztern Operation eine solche seyn.
   Umgekehrt kann also:
2. eine zusammengesetzte Zahl (ein Product mehrerer anderer) nicht Theiler einer Zahl seyn, wenn nicht jeder der Factoren, woraus sie besteht, in diese theilbar ist.

3. **Wenn ein Factor einer zusammengesetzten Zahl durch eine andere theilbar ist, so ist es auch diese Zahl selbst;**

denn die Division eines Products konnte auch durch Division eines Factors desselben geschehen (§. 73).

§. 84.

Ob eine Zahl eine zusammengesetzte oder eine Primzahl ist, wird dadurch entschieden, daß man versucht, ob sie sich durch irgend eine andere ohne Rest dividiren läßt oder nicht. Man hat aber nur nöthig, diese Versuche mit schon bekannten Primzahlen anzustellen, denn, wenn sie durch eine zusammengesetzte Zahl theilbar ist, so ist sie es auch durch die Primzahl, welche diese als Factor enthält (§. 83. Nr. 1). Uebrigens ist es auch nicht erforderlich, durch alle Primzahlen, welche kleiner sind als die vorgelegte Zahl, diese bei einer solchen Untersuchung zu dividiren; doch kann das Nähere darüber hier noch nicht erklärt werden.

Ohne Versuche läßt sich im Allgemeinen von **jeder** Zahl nicht angeben, ob und welche Theiler sie hat. Von mehreren kann man indessen aus ihrem bloßen Anblicke oder durch sehr leichte Hülfsmittel schon erkennen, ob sie durch gewisse andere Zahlen theilbar ist oder nicht.

Kennzeichen, woraus man schließt, ob eine Zahl durch 2, 3, 5, 11 u. s. w. theilbar ist.

Anmerkung. Ueber die Reihe der Primzahlen von 1 an bis zu einer gewissen Höhe hinauf, giebt es in mehreren mathematischen Werken Tabellen; unter andern: in Lamberts Zusätzen zu den log. u. trigon. Tafeln von 1 bis 101999; in den Vegaschen Tafeln; in Kulik's vollständiger Sammlung mathematisch-physicalischer Tafeln.

§. 85.

Die zusammengesetzten Zahlen müssen ihrer Erklärung gemäß in Factoren ganzer Zahlen zerlegbar seyn; so lange

nun ein solcher Factor keine Primzahl ist, wird er selbst wieder in Factoren aufgelöst werden können. Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich daher in Factoren zerlegen, welche sämmtlich Primzahlen sind, diese nennt man die *einfachen* Factoren der Zahl. Das Verfahren bei dieser Zerlegung ist:

man dividirt die gegebene Zahl durch die kleinste Primzahl, durch welche sie theilbar ist; den gefundenen Quotienten wiederum durch seinen kleinsten einfachen Theiler, und so fährt man fort, bis ein Quotient entsteht, der selbst eine Primzahl ist; sämmtliche Divisoren und der letzte Quotient sind die einfachen Factoren oder einfachen Theiler der vorgelegten Zahl. Es ist klar, daß darunter mehrere gleiche vorkommen können.

Will man auch die zusammengesetzten, also sämmtliche Factoren einer Zahl haben, so sucht man auf die angezeigte Art erst ihre einfachen, und multiplicirt diese dann je zwei, je drei u. s. w. in einander. Die dadurch entstehenden Producte sind die verlangten zusammengesetzten Factoren; denn daß diese wirklich Theiler der gegebenen Zahl sind, folgt daraus, weil sie nur aus Factoren bestehen, die zugleich in dieser als solche liegen (§. 82).

Beispiel. Es sey die Zahl 60 in ihre sämmtlichen Factoren zu zerlegen, so ist

$$60 : 2 = 30$$
$$30 : 2 = 15$$
$$15 : 3 = 5,$$

mithin sind die einfachen Factoren der Zahl 60:

$$2, 2, 3, 5;$$

und es ist $2 . 2 . 3 . 5 = 60$.

Nun multiplicire man je zwei der einfachen Factoren zusammen, men, also:

2 . 2 = 4
2 . 3 = 6
2 . 5 = 10
3 . 5 = 15.

Ferner je drei derselben, also:

2 . 2 . 3 = 12
2 . 2 . 5 = 20
2 . 3 . 5 = 30;

daher sämmtliche Factoren von 60:

2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30.

§. 86.

Der Theiler einer Zahl wird auch ein Maaß derselben genannt. Ist eine Zahl Theiler zweier oder mehrerer anderer Zahlen, so heißt sie ein gemeinschaftliches Maaß derselben. Es ist klar, daß es mehrere gemeinschaftliche Theiler für zwei oder mehrere Zahlen geben kann; dann ist der größte davon deren größtes gemeinschaftliches Maaß.

Man nennt Zahlen Primzahlen unter sich, wenn sie keinen andern gemeinschaftlichen Theiler als die Einheit haben; im Gegensatze heißen sie zusammengesetzte Zahlen unter sich, wenn sie außer der Einheit einen oder mehrere gemeinschaftliche Theiler haben.

Absolute Primzahlen sind auch Primzahlen unter sich; zusammengesetzte Zahlen können jedoch Primzahlen unter sich seyn, z. B. 8 und 9. Eine absolute Primzahl hat nur in dem Falle mit einer zusammengesetzten einen gemeinschaftlichen Theiler, wenn sie selbst Theiler dieser ist, z. B. 5 und 20.

§. 87.

Wenn das größte gemeinschaftliche Maaß gewisser Zahlen selbst noch in Factoren ganzer Zahlen zerlegbar ist, welche man nach §. 85 bestimmen könnte, so sind diese auch sämmtlich Theiler jener Zahlen (§. 83). Ueberhaupt ist die Aufgabe: das größte gemeinschaftliche Maaß mehrerer Zahlen zu

finden, besonders wichtig. Die Auflösung derselben soll hier zuerst für zwei Zahlen gezeigt werden, welcher Fall am meisten vorkommt, und wodurch man dann auch leicht im Stande ist, sie auf mehrere Zahlen auszudehnen. Es giebt zwei verschiedene Methoden, nach welchen man dabei verfahren kann.

§. 88.

Die eine ist folgende: man zerlege nach §. 85 beide gegebene Zahlen in ihre sämmtlichen Factoren; finden sich unter diesen einer, oder mehrere, welche beiden zugleich angehören, so ist der größte davon das gesuchte größte gemeinschaftliche Maaß jener Zahlen. Schon aus §. 86 erhellet, daß es hierbei nicht immer erforderlich ist, daß beide Zahlen sich in Factoren zerlegen lassen, um ein gemeinschaftliches Maaß zu haben — ist die kleinere selbst das größte gemeinschaftliche Maaß und dabei eine Primzahl, so tritt dieser Fall ein. — Sind aber beide Zahlen nicht in Factoren zerlegbar, oder finden sich darunter keine gemeinschaftliche, so sind sie Primzahlen unter sich.

Diese Methode ist jedoch bei großen Zahlen ziemlich weitläufig. Bequemer, daher auch üblicher, ist die zweite.

§. 89.

Ihr liegt folgender Satz zum Grunde:

wenn eine Zahl Theiler des bei einer Division gebliebenen Restes und des Divisors ist, so ist sie auch Theiler des Dividends. Denn der Dividend besteht in diesem Falle aus zwei Stücken, wovon das eine gleich dem Vielfachen des Divisors in den Quotienten, das andere gleich jenem Reste ist; die Division an ihm muß mithin an beiden Stücken geschehen (§. 75.) und eine Zahl, welche Theiler jedes dieser Stücke ist, wird auch in ihn theilbar seyn. Nun wird das erste als ein Product, durch Division eines seiner beiden Fac-

toren, hier des Divisors, dividirt werden können (§. 73) in welchem die in Frage stehende Zahl angenommener Maaßen aufgeht; sie geht also auch in diesem Producte auf; vom zweiten Stücke, dem Reste, ist sie ebenfalls der Annahme nach Theiler, — beide Obliegenheiten derselben sind mithin erfüllt, und so bestätigt sich der obige Satz.

§. 90.

Das Verfahren bei der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maaßes zweier Zahlen ist hiernach:

man dividire die kleinere von beiden in die größere; geht diese Division auf, so ist erstere selbst das größte gemeinschaftliche Maaß beider, da eine Zahl sich selbst allemal ohne Rest dividirt, und ein größerer Theiler derselben nicht denkbar ist. Bleibt bei dieser Division aber ein Rest, so verfährt man mit ihm und dem Divisor (der kleinern Zahl) wie vorher, und diese successiven Divisionen setzt man fort, bis endlich kein Rest mehr bleibt; dann ist der letzte Divisor das größte gemeinschaftliche Maaß der vorgelegten Zahlen. Der Beweis, welcher sich auf eine mehrmalige Anwendung des dargestellten Satzes stützt „die Zahl, welche in den Divisor und Rest theilbar ist, wird es auch in den Dividend seyn," kann in allgemeinen Zeichen so gegeben werden:

wenn	1, a	dividirt durch	b	den Rest	c giebt
	2, b	= =	c	= =	d =
	3, c	= =	d	= =	e =
endlich	4, d	= =	e	= =	o =

so ist in 4, e der größte gemeinschaftliche Theiler von d und e; da nun

in 3, d und e Divisor und Rest bei der Division des Dividends c sind, so ist ihr größter gemeinschaftlicher Theiler e, auch der von c; daher ist

in 2, wo c und d Divisor und Rest, b Dividend ist,

auch e größter gemeinschaftlicher Theiler von b und c; mithin endlich

in 1, wo die letztern Divisor und Rest sind, ihr größter gemeinschaftlicher Theiler e, auch der des Dividends a; das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen a und b ist also der letzte Divisor e, bei dessen Division der Rest gleich Null wurde.

Bei der Division einer ganzen Zahl durch eine kleinere ist, im Fall ein Rest bleibt, dieser noch kleiner als der Divisor. Die durch das angezeigte Verfahren nach und nach entstehenden Reste werden mithin immer kleinere Zahlen, und es kann sich ereignen, daß die Division nicht eher aufgeht, bis die Einheit vorher als Rest geblieben ist, welche sich in jede Zahl ohne Rest dividiren läßt; das größte gemeinschaftliche Maaß der anfängs angenommenen oder gegebenen Zahlen ist mithin alsdann die Einheit. Dieser Fall muß daher eintreten, wenn zwei Zahlen Primzahlen unter sich sind.

Beispiele.

1) Es sey das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 4009 und 380 zu finden, so ist

1)	bei	der	Division	von	4009	durch	380	der Rest	209
2)	=	=	=	=	380	=	209	= =	171
3)	=	=	=	=	209	=	171	= =	38
4)	=	=	=	=	171	=	38	= =	19
5)	=	=	=	=	38	=	19	= =	0

daher 19 das gesuchte größte gemeinschaftliche Maaß der beiden Zahlen 4009 und 380.

2) Es mögen 456 und 115 die zu dieser Untersuchung gegebenen Zahlen seyn, so ist

1)	bei	der	Division	von	456	durch	115	der Rest	111
2)	=	=	=	=	115	=	111	= =	4
3)	=	=	=	=	111	=	4	= =	3
4)	=	=	=	=	4	=	3	= =	1
5)	=	=	=	=	3	=	1	= =	0

die

die vorlegten Zahlen sind; also Primzahlen unter sich, da ihr größtes gemeinschaftliches Maaß die Einheit ist.

§. 91.

Um dieselbe Aufgabe für mehrere Zahlen zu lösen, ändert sich die erste Methode der Auflösung (nach §. 88) nicht. Zerlegt man nämlich jede der gegebenen Zahlen in ihre sämmtlichen Factoren, so wird der größte von ihnen, welcher zugleich in allen diesen Zahlen vorkommt, das größte gemeinschaftliche Maaß derselben seyn; und es kann offenbar kein solches, außer der Einheit geben, wenn dabei nicht in allen Zahlen zugleich eine und dieselbe als Factor erscheint.

Will man aber die zweite Methode anwenden, so suche man nach ihr zuerst das größte gemeinschaftliche Maaß von beliebigen zweien der vorgelegten Zahlen. Hierauf bestimme man solches für dieses und die dritte Zahl; dann für letzteres und die vierte Zahl und so fort, — das zuletzt gefundene größte gemeinschaftliche Maaß ist es auch für alle Zahlen. Es ist nur nöthig, den Beweis für drei Zahlen zu führen, indem er sich eben so für mehrere wiederholt. Nun wird aber die Zahl, welche in dem gemeinschaftlichen Maaße zweier anderer aufgeht, auch in diesen selbst aufgehen, weil sie jede ein Vielfaches dieses Maaßes und einer andern Zahl sind (§. 83 Nr. 3). Da ferner das größte gemeinschaftliche Maaß zwischen der dritten Zahl und dem der ersten beiden, die größte, in der dritten theilbare Zahl ist, welche zugleich in jenem Maaße aufgeht, so giebt es auch keine größere Zahl, die gleichzeitig in die ersten beiden theilbar wäre, weil diese sonst noch einen gemeinschaftlichen Factor hätten, der nicht in deren größtem gemeinschaftlichen Maaße als solcher enthalten wäre. Sind z. B. die Zahlen 12, 8 und 26 gegeben, so ist zwischen 12 und 8 das größte gemeinschaftliche Maaß 4, und das zwischen 4 und 26 ist 2, folglich auch letzteres dasjenige für alle drei Zahlen.

Gäbe es aber eine größere Zahl, die in alle drei zugleich theilbar wäre, so müßte diese auch in 4 und 26 zugleich als Factor liegen u. s. w.

§. 92.

Im Gegensatze des gemeinschaftlichen Maaßes mehrerer Zahlen, steht ihr gemeinschaftliches Vielfaches, nämlich die Zahl, worin sie alle theilbar sind. Das Product derselben leistet dieser Bedingung augenscheinlich ein Genüge; nämlich, eben weil ein solches jede der fraglichen Zahlen als Factor enthält, ist es ein Vielfaches von jeder, und sie gehen sämmtlich darin auf. Oft lassen sich aber kleinere Zahlen dafür finden, und die kleinste davon, wird das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, auch der kleinste gemeinschaftliche Dividuus dieser Zahlen genannt. Die Bestimmung desselben kann auf folgende Art geschehen. Wenn die Zahlen sämmtlich Primzahlen unter sich sind (kein gemeinschaftliches Maaß als die Einheit haben), so giebt es keine kleinere Zahl als das Product derselben, worin zugleich jede theilbar wäre (§§. 82 83). Haben aber zwei oder mehrere der gegebenen Zahlen gemeinschaftliche Factoren, so darf man alle diese nur in einer der Zahlen beibehalten, also aus den übrigen als Factoren weglassen, und dann das Product aus ihnen bilden, so wird hierin doch jede gegebene Zahl theilbar seyn, indem es die Factoren enthält, woraus diese bestehen (§. 82); und es wird die möglichst kleinste Zahl seyn, die diese Eigenschaft hat, weil nur die nöthigen Factoren darin vorkommen. Man kann daher auch sagen: das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen wird ein Product aus allen den einfachen Factoren, welche in jeder enthalten sind, wobei aber solche, welche in einer dieser Zahlen liegen, für die andern nicht wiederholt werden, worin sie gleichfalls vorkommen.

Anmerk. Das gewöhnliche hierauf beruhende Verfahren bei dem Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zeigt nachfolgendes Exempel, worin die gegebenen Zahlen in der ersten Horizontal-Reihe stehen, und die einfachen Factoren zur Linken in eine Vertical-Reihe, durch einen Strich getrennt, gesetzt sind; die übrigen Reihen, sind die Quotienten, welche durch successive Division der Zahlen durch die resp. einfachen Factoren hervorgehen. Die Zahlen, die sich nicht durch den links stehenden Factor dividiren ließen, sind dabei zur bessern Uebersicht allemal wieder hingeschrieben.

2	12, 25, 60, 76, 140.
2	6, 25, 30, 38, 70.
3	3, 25, 15, 19, 35.
5	1, 25, 5, 19, 35.
5	1, 5, 1, 19, 7.
7	1, 1, 1, 19, 7.
19	1, 1, 1, 19, 1.
	1, 1, 1, 1, 1.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 12, 25, 60, 76 und 140 ist demnach $2.\ 2.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 19 = 39900$.

§. 93.

Jede ganze Zahl, welche durch 2 theilbar ist, heißt eine gerade Zahl; jede ganze Zahl, welche nicht durch 2 theilbar ist, eine ungerade Zahl.

Wenn n jede beliebige ganze Zahl vorstellt, so ist 2n der allgemeine Ausdruck einer geraden Zahl, denn

$$2n : 2 = n,$$

oder 2n ist durch 2 theilbar.

Ferner ist $2n \pm 1$ der allgemeine Ausdruck einer ungeraden Zahl,

denn $(2n \pm 1) : 2 = \frac{2n}{2} \pm \frac{1}{2} = n \pm \frac{1}{2}$,

oder $2n \pm 1$ läßt sich nicht ohne Rest durch 2 dividiren.

Fünftes Capitel.

Von den Rechnungsarten mit Brüchen.

§. 94.

Der Begriff des **Bruchs** ist bereits im Vorhergehenden festgelegt. — Die Nothwendigkeit, durch ihn eine Größe darzustellen, trat jedesmal ein, wenn diese etwas Kleineres, als die Einheit war, durch welche sie ausgedrückt werden sollte.

Aber auch in dem Falle, in welchem etwas Größeres als die Einheit durch eine Zahl ausgesprochen werden soll, kann die Form eines Bruchs für eine solche Zahl gebraucht werden. Denn, wenn die Einheit in n gleiche Theile zerlegt wird (unter n eine unbestimmte Anzahl verstanden) und man wiederholt einen solchen Theil zmal, so muß, so lange die Anzahl z kleiner als n ist, eine Größe $\frac{z}{n}$ entstehen, welche auch kleiner als die Einheit ist, nach dem Grundsatze: ein oder einige Theile sind kleiner als das Ganze.

Wenn $z = n$ ist, so setzt man alle die Theile, worin die Einheit zerlegt war, erhält sie also in dem Ausdrucke $\frac{z}{n}$ wiederum selbst.

Ist aber endlich z größer als n, so nimmt man mehr von den Theilen, als erforderlich sind, um zusammen das Ganze, die Einheit auszumachen; der Bruch $\frac{z}{n}$ wird dann mithin etwas Größeres, als diese.

Ein Bruch heißt **ächt**, wenn sein Zähler kleiner als sein Nenner; **unächt**, wenn das Umgekehrte der Fall ist. Der erstere ist, wie eben dargethan, immer kleiner, der letztere, größer als die Einheit.

§. 95.

Daß in Brüchen jedes beliebige Verhältniß zwischen

Zähler und Nenner Statt haben kann, erhellet auch daraus, daß der Quotient zweier beliebiger ganzer Zahlen allemal einem Bruche gleich ist, dessen Zähler der Dividend, dessen Nenner der Divisor ist. (§. 68).

Umgekehrt darf also jeder Bruch als der Quotient angesehen werden, welcher durch Division des Zählers dieses Bruchs durch den Nenner desselben entstehen würde. Indessen kann die Lehre von den Brüchen dadurch nicht, wie es im ersten Augenblick scheinen möchte, auf die von ganzen Zahlen zurückgeführt werden; denn, wo ein Quotient ganzer Zahlen durch einen Bruch ausgedrückt wird, ist die Division derselben nur angedeutet, nicht aber wirklich vollzogen. Gerade so kömmt man häufig auf Brüche, und sieht sich genöthigt, sie als eigenthümliche Größen zu behandeln. Jener Satz giebt zugleich zu der Bemerkung Veranlassung, daß man sich die Entstehung eines Bruchs aus der Einheit, anstatt wie bei der ersten Erklärung desselben §. 10 gezeigt ist, auch so denken darf, daß die Einheit zuerst so oft gesetzt ward, wie der Zähler angiebt, und darauf das Resultat durch den Nenner dividirt ist. Die beiden mit der Einheit zur Hervorbringung des Bruchs vorzunehmenden Operationen, dürfen also in verwechselter Ordnung ausgeführt werden.

Den eigentlichen Rechnungsarten mit Brüchen müssen Betrachtungen über die Veränderungen ihrer Form, und über die Ausführung gewisser Operationen an denselben vorausgehen. Diese betreffen daher den Gegenstand der nächsten hier aufgestellten Sätze.

§. 96.

Wenn der Nenner eines unächten Bruchs sich in den Zähler desselben, ohne Rest dividiren läßt, so ist der Bruch einer ganzen Zahl gleich, und umgekehrt kann jede ganze

Zahl als ein Bruch mit einem willkührlichen oder gegebenen Nenner geschrieben werden.

Das Erste ist klar, da hier nichts geschieht, als daß die im Bruche angedeutete Division wirklich vollzogen wird.

Z. B. $\frac{12}{4} = 12 : 4 = 3$;

$\frac{ab}{a} = ab : a = b$ (§. 74).

Das Zweite folgt daraus, daß Multiplication und Division einer Größe durch eine und dieselbe Zahl sie unverändert lassen. (§. 63). Nun multiplicire man die in einen Bruch zu verwandelnde ganze Zahl mit derjenigen, welche Nenner des Bruchs werden soll, so erhält man den Zähler desselben; denn die Division, welche durch den ihm untergesetzten Nenner angedeutet wird, hebt diese Multiplication wieder auf.

So ist z. B. $5 = \frac{5 \cdot 3}{3} = \frac{15}{3}$;

allgemein : $g = \frac{gn}{n}$.

Kömmt es bloß darauf an, einer ganzen Zahl die Bruchsgestalt zu geben, ohne daß der Nenner anderer Ursachen wegen bestimmt wird, so ist es am einfachsten, zum Nenner die Einheit zu wählen; indem die Multiplication oder Division durch diese, jede Größe unverändert läßt.

Z. B. $5 = \frac{5}{1}$;

$a = \frac{a}{1}$.

Anmerk. Man pflegt wohl eigentliche Brüche von uneigentlichen zu unterscheiden, und unter jenen solche zu verstehen, welche wirklich nicht anders, als durch die Bruchsgestalt ausgedrückt werden können; unter diesen aber ganze Zahlen, denen nur die Form von Brüchen gegeben ist.

§. 97.

Ein unächter Bruch kann in eine ganze Zahl mit

angehängtem ächten Bruche, in eine gemischte Zahl, umgeändert werden. Dabei geschieht wiederum nichts anders, als daß die in ihm angedeutete Division des Zählers durch den Nenner, so weit es angeht, ausgeführt wird. (§. 69).

Z. B. $\frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}$.

Anmerk. Es ist gebräuchlich bei Zahlen die Vereinigung einer ganzen Zahl mit einem Bruche, wenn beide einstimmig sind, durch bloßes Aneinanderrücken derselben anzudeuten, und das Zeichen $+$ zwischen beiden wegzulassen: anstatt $3 + \frac{3}{4}$ schreibt man $3\frac{3}{4}$. Bei Buchstaben darf dies nicht geschehen, weil sonst eine Multiplication der ganzen Zahl mit dem angehängten Bruche, unter einem solchen Ausdrucke verstanden würde. (§. 48).

§. 98.

Ein Bruch mit beliebigem Nenner, dessen Zähler gleich Eins ist, heißt ein Stammbruch. Die allgemeine Form eines solchen ist also $\frac{1}{n}$.

Jeder andere Bruch darf als ein Product aus einem Stammbruche mit demselben Nenner, in seinen Zähler angesehen werden. In Zeichen: es ist $\frac{z}{n} = \frac{1}{n} \cdot z$.

Denn, nach der Erklärung der Bildung eines Bruchs aus der Einheit, soll man einen der gleichen Theile, worin man sie zerlegte $\left(\frac{1}{n}\right)$, so oft setzen, als der Zähler (z) des Bruchs anzeigt.

§. 99.

Eine gemischte Zahl wird in einen unächten Bruch verwandelt, indem man die Vereinigung der ganzen Zahl mit dem angehängten Bruche ausführt. Man ändert nämlich die ganze Zahl zuerst in einen gleichgeltenden Bruch um, welcher mit dem mit ihr zu vereinigenden Bruche denselben Nenner

hat. (§. 96). Brüche mit einerlei Nenner werden aber addirt, indem man der Summe ihrer Zähler, als Zähler eines Bruchs, wiederum diesen Nenner giebt. Denn in jedem von solchen Brüchen werden dieselben Theile der Einheit angegeben, deren Menge allemal sein Zähler darstellt. Sollen sie zu einem Inbegriffe zusammengefaßt werden, so muß dies also durch die Vereinigung der Zähler derselben geschehen, und die Art der Theile der Einheit, die der Nenner besagt, darf dabei nicht geändert werden. In Zeichen:

Es ist $a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$.

Denn $a = \frac{ac}{c}$, daher

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}.$$

Hieraus fließt für die Verwandlung einer gemischten Zahl in einen unächten Bruch, die Regel: man multiplicire die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs, addire zum Producte dessen Zähler, und setze unter diese Summe, als Zähler, jenen Nenner.

Z. B. $5\frac{3}{8} = \frac{43}{8}$.

§. 100.

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man seinen Zähler mit derselben multiplicirt und seinen Nenner unverändert läßt. — Man hat daher, in allgemeinen Zeichen ausgedrückt:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}.$$

Denn die Multiplication mit einer ganzen Zahl fordert mehrmaliges Setzen des Multiplicands; es ist also

$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots\ldots$, wobei der Bruch $\frac{a}{b}$ so oft gesetzt wird, als die Einheit in c enthalten ist. Die

Vereinigung dieser gleichen Brüche geschieht aber durch die der Zähler, deren Summe der gemeinschaftliche Nenner wieder gegeben wird (§. 99), folglich wird $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a+a+a+a+\ldots}{b}$ und dies ist, weil die Größe a im Zähler cmal als Theil steht, $= \frac{ac}{b}$.

Der Beweis kann auch dadurch geführt werden, daß man den Bruch als einen Quotienten betrachtet. Die Division eines Products ac durch b konnte nämlich nach §. 73 an einem Factor, a, desselben geschehen, wobei dann dem erhaltenen Quotienten $\frac{a}{b}$ der andere Factor c als solcher beigefügt werden mußte. Die Andeutung der Multiplication eines Bruchs $\frac{a}{b}$ durch eine ganze Zahl c ist also dieselbe, welche in der Division eines Products ac durch die Zahl b liegt; d. h. die eine kann für die andere an die Stelle gesetzt werden.

§. 101.

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, indem man seinen Nenner dadurch multiplicirt und seinen Zähler unverändert läßt. Es ist also

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}.$$

Dies läßt sich folgendermaaßen darthun. Setzt man für den Bruch $\frac{a}{b}$ den gleichgeltenden Ausdruck $\frac{1}{b} \cdot a$ (§.98), so kann die Division desselben an dem Multiplicand $\frac{1}{b}$ vorgenommen werden (§. 73). Da dieser nun einen Theil der Einheit ausdrückt, welcher durch Division derselben durch b hervorgeht (§. 65), und jetzt selbst wieder in c gleiche Theile zerlegt werden soll, so schreibt das Resultat davon eine zweimalige Division an der Einheit vor, nämlich erst durch b

und dann durch c; anstatt dessen darf man sie aber auf einmal durch das Product bc beider Zahlen dividiren. So ergiebt sich, daß $\frac{a}{b} : c = \left(\frac{1}{b} \cdot a\right) : c = \frac{1}{bc} \cdot a = \frac{a}{bc}$ ist. — Derselbe Beweis liegt auch in dem Satze des §. 72, welcher zeigt, daß die Zahl a durch das Product bc dividirt wird, indem man den Quotienten $\frac{a}{b}$ selbst noch durch c dividirt; daß also $a : bc$ oder $\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c$ ist.

§. 102.

Da die Multiplication durch Division aufgehoben wird und umgekehrt, so folgen aus den beiden letzten §§. sogleich zwei andere Sätze, welche gleichfalls ein Verfahren anzeigen, wie ein Bruch durch eine ganze Zahl zu multpliciren und zu dividiren ist. Sie sind:

1. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl multiplicirt, indem man bei ungeändertem Zähler desselben, seinen Nenner dadurch dividirt; denn umgekehrt war Multiplication des Nenners eine Division des Bruchs (§. 101).

2. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, indem man bei ungeändertem Nenner desselben seinen Zähler dadurch dividirt; denn Multiplication des Zählers war Multiplication des Bruchs (§. 100).

Hiernach ist:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b : c}, \text{ und}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}.$$

Wenn aber die Division des Nenners, oder im andern Falle die Division des Zählers durch die ganze Zahl (c), nicht aufgeht, so erscheint ein Bruch, dessen Nenner oder Zähler keine ganze Zahl, sondern selbst ein Bruch, und daher

von unbequemer Gestalt ist. Dann wird man also die Multiplication oder Division des Bruchs durch eine ganze Zahl nach den ersten Regeln ausführen. Indessen sind die beiden andern, hier daraus hergeleiteten Sätze deßhalb nicht minder wichtig, und geben gerade in Verbindung mit ihnen einen Hauptsatz für die Rechnung mit Brüchen, welcher so ausgesprochen werden kann:

Division des Zählers eines Bruchs entspricht Multiplication seines Nenners; Division des Nenners entspricht Multiplication des Zählers; — d. h. die eine Operation kann allemal für die andere an die Stelle gesetzt werden.

§. 103.

Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner, oder einer von beiden, selbst Brüche sind, auf welchen Ausdruck man nach dem vorigen §. durch Andeutung gewisser Operationen kommen könnte, die mit dem Bruche vorgenommen werden sollen, heißen zusammengesetzte, auch Bruchsbrüche, — im Gegensatze der einfachen, worin Zähler und Nenner ganze Zahlen sind.

Die Reduction zusammengesetzter Brüche auf einfache, ergiebt sich aber aus dem zuletzt aufgestellten Satze: der Divisor (Nenner) des Zählers wird dann zum Factor im Nenner, und der Divisor (Nenner) des Nenners zum Factor im Zähler gemacht; z. B.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}; \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}; \quad \frac{\frac{a}{c}}{b} = \frac{a}{bc}.$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{9}} = \frac{27}{20}; \quad \frac{3}{\frac{5}{7}} = \frac{21}{5}; \quad \frac{\frac{7}{9}}{5} = \frac{7}{45}.$$

§. 104.

1. **Der Werth eines Bruchs bleibt derselbe, wenn man Zähler und Nenner desselben mit einerlei Zahl multiplicirt.**

Denn Multiplication des Zählers ist Multiplication des Bruchs; Multiplication des Nenners, Division des Bruchs (§§. 100. 101); beide Operationen mit einerlei Zahl vorgenommen, heben sich aber gegenseitig auf, und lassen die Größe, woran sie geschehen, ungeändert.

Z. B. $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$;

$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$.

2. **Der Werth eines Bruchs bleibt derselbe, wenn Zähler und Nenner desselben durch einerlei Zahl dividirt werden.**

Denn nach §. 102 ist Division des Zählers, Division des Bruchs; Division des Nenners, Multiplication des Bruchs. Auch hier wird also durch die eine Operation wieder aufgehoben, was die andere veränderte.

Z. B. $\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$;

$\frac{10}{15} = \frac{10 : 5}{15 : 5} = \frac{2}{3}$.

§. 105.

Ein Bruch heißt auf seinen **kleinsten Ausdruck** gebracht, wenn Zähler und Nenner desselben Primzahlen unter sich sind.

Haben Zähler und Nenner eines Bruchs noch gemeinschaftliche Factoren, so dividirt man beide durch ihr größtes gemeinschaftliches Maaß, welches nach Nr. 2 des vorigen §. den Werth des Bruchs nicht ändert, und wodurch er zugleich auf den möglichst kleinsten Ausdruck gebracht wird. Sind dabei

Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs so beschaffen, daß man nicht sogleich übersehen kann, ob und welche gemeinschaftliche Factoren sie haben, so sucht man nach §. 90 zwischen beiden das größte gemeinschaftliche Maaß. Um z. B. den Bruch $\frac{85}{544}$ kleiner zu machen, bestimmt man zwischen 85 und 544 das größte gemeinschaftliche Maaß, wofür sich 17 findet; hierdurch dividirt man Zähler und Nenner. Dadurch wird $\frac{85}{544} = \frac{5}{32}$, und im letztern Bruche sind nun Zähler und Nenner Primzahlen unter sich.

§. 106.

Auf der Verwandlung eines Bruchs durch Multiplication seines Zählers und Nenners mit einerlei Zahl, beruht die Möglichkeit, mehrere Brüche, deren Nenner verschieden sind, in jedem Falle dahin zu bringen, daß sie ohne Aenderung ihres Werths gleiche Nenner bekommen: sie gleichnamig zu machen.

Es mögen dazu zuerst zwei Brüche, allgemein $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gegeben seyn, so giebt das Product des einen Nenners in den andern, eine und dieselbe Zahl $bd = db$, und dies wird der gemeinschaftliche Nenner; damit aber der Werth des Bruchs nicht leide, muß nun auch der Zähler jedes Bruchs mit dem Nenner des andern multiplicirt werden, so wird also: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ und $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$. Auf gleiche Art gehen z. B. aus den Brüchen $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{7}$, wenn sie gleichnamig gemacht werden, die $\frac{21}{35}$ und $\frac{10}{35}$ hervor.

Sind mehrere Brüche gegeben, so ist das Product aller Nenner in einander der gemeinschaftliche Nenner, und dann muß, damit Zähler und Nenner mit einerlei Zahl multiplicirt werden, der Zähler jedes Bruchs ein Product aus

ihm in den Nennern aller übrigen Brüche werden. Auf diese Art verwandeln sich die Brüche: $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$ in die gleichnamigen $\frac{adfh}{bdfh}$, $\frac{cbfh}{bdfh}$, $\frac{ebdh}{bdfh}$ und $\frac{gbdf}{bdfh}$.

Dies Verfahren ist ganz allgemein, und man kann dadurch irgend gegebene Brüche immer auf einerlei Nenner bringen. Will man aber zugleich darauf sehen, daß die neuen Brüche bei gleichen Nennern durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt werden, so erleidet es in gewissen Fällen eine Abänderung.

§. 107.

Kommen nämlich in den Nennern der gegebenen Brüche, welche gleichnamig gemacht werden sollen, gemeinschaftliche Factoren vor, so wird man ihnen wechselseitig nur solche hinzusetzen, welche bewirken, daß sie gänzlich aus einerlei Factoren bestehen. Diejenigen Factoren, welche man dem Nenner hinzufügt, müssen alsdann auch dem Zähler desselben Bruchs als Factoren hinzugefügt werden. Mit andern Worten: der gemeinschaftliche Nenner mehrerer Brüche muß zwar ein Vielfaches aus ihren Nennern seyn, aber man darf dafür das kleinste gemeinschaftliche Vielfache derselben nehmen.

Der gemeinschaftliche Nenner hat also immer die Eigenschaft, daß der Nenner jedes Bruchs darin theilbar ist; und wenn man nicht sogleich übersehen könnte, welche Factoren man einem Nenner hinzusetzte, damit aus ihm der gemeinschaftliche Nenner wurde, und mit welchen man eben auch den Zähler dieses Bruches multipliciren muß, so fände sich diese Zahl durch Division des gemeinschaftlichen Nenners durch jenen Nenner.

Bei Brüchen, deren Nenner nur aus einfachen Buchstaben-Größen bestehen, hat die Entdeckung des kleinsten ge-

meinschaftlichen Vielfachen von ihnen, keine Schwierigkeit, weil die Factoren derselben sogleich zu übersehen sind. Bei bestimmten Zahlen ist es, besonders wenn sie groß sind, umständlicher, da nun zuvor die Zerlegung derselben in ihre einfachen Factoren nöthig wird; man verfährt dabei nach §. 92.

Beispiele. 1) Für die Brüche:

$$\frac{a}{bc},\ \frac{m}{bd},\ \frac{n}{cd},\ \frac{g}{fcc}$$

ist der gemeinschaftliche Nenner bcdfc; sie verwandeln sich daher in die gleichnamigen:

$$\frac{acdf}{bcdfc},\ \frac{mcfc}{bcdfc},\ \frac{nbcf}{bcdfc},\ \frac{gbd}{bcdfc}.$$

2) Für die Brüche:

$$\frac{3}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{1}{12},\ \frac{3}{9}$$

ist der gemeinschaftliche Nenner $4 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 = 72$; und es entstehen dann daraus die gleichnamigen:

$$\frac{54}{72},\ \frac{45}{72},\ \frac{6}{72},\ \frac{24}{72}.$$

3) Die Brüche:

$$\frac{4a}{n},\ \frac{m}{3ab},\ \frac{g}{8c},\ \frac{f}{12b}$$

erscheinen, unter den gemeinschaftlichen Nenner 24abc gebracht, als:

$$\frac{6nbc}{24abc},\ \frac{8mc}{24abc},\ \frac{3gab}{24bac},\ \frac{2fac}{24abc}.$$

§. 108.

Von mehreren Brüchen mit einerlei Nenner ist offenbar derjenige der größte, welcher den größten Zähler hat. Wenn aber mehrere Brüche gleiche Zähler haben, so ist derjenige, dessen Nenner der größte ist, am kleinsten, denn bei ihm wird die Einheit in die größte Anzahl gleicher Theile zerlegt, diese müssen also desto kleiner ausfallen, und bei allen werden, wegen der gleichen Zähler, eine gleiche Menge gewisser Theile der Einheit genommen. (Vergl. §§. 100. 101.) Um

aber Brüche in Absicht ihrer Größe zu vergleichen, worin Zähler und Nenner verschieden sind, ist es am bequemsten, sie erst gleichnamig zu machen.

Addition.

§. 109.

Es ist bereits bewiesen, daß Brüche mit gleichen Nennern durch Addition ihrer Zähler, deren Summe man denselben Nenner giebt, vereinigt werden (§. 99). Da aber ebensowohl Brüche mit verschiedenen Nennern zur Addition gegeben seyn können, so heißt die allgemeine Regel dafür: man verwandele die zu addirenden Brüche in gleichnamige, und gebe dann der Summe ihrer Zähler als Zähler, den allen Brüchen gemeinschaftlichen Nenner, zum Nenner, so wird dieser neue Bruch die Summe der einzelnen seyn.

Beispiele. $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$; $\frac{5}{9} + \frac{2}{7} + \frac{1}{12} + \frac{34}{18} = \frac{140}{252} + \frac{72}{252} + \frac{21}{252} + \frac{476}{252} = \frac{709}{252} = 2\frac{105}{252}$

$= 2\frac{5}{12}$ (letzteres nach §. 99 und §. 105);

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a + c + d}{b};$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{g}{h} = \frac{adh + bch + gbd}{bdh}.$$

§. 110.

Bei einem negativen Bruche kann man entweder den Zähler negativ und den Nenner positiv, oder den Zähler positiv und den Nenner negativ nehmen; denn es ist

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \text{ (§§. 71. 95.)}$$

Da nun die Vereinigung der Brüche durch die ihrer Zähler ausgeführt wird, so läßt man, wenn dabei negative Brüche

Brüche vorkommen, das Zeichen minus an den Zählern derselben haften.

Wäre umgekehrt der Zähler oder der Nenner eines Bruches negativ, so darf man dafür den Bruch negativ setzen. Sind aber beide, Zähler und Nenner, negativ, so ist der Bruch positiv; denn es ist

$$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} \quad (\text{§. } 71).$$

Hiernach ist z. B.

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{6-5}{8} = \frac{1}{8};$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} + \frac{d}{c} = \frac{a-b+d}{c};$$

$$-\frac{a}{c} - \frac{d}{c} = \frac{-(a+d)}{c} = -\frac{a+d}{c};$$

§. 111.

Um mehrere Brüche und ganze Zahlen zu addiren, addirt man die Brüche und die ganzen Zahlen, jede Art für sich, und vereinigt darauf beide Summen, indem man der der ganzen Zahlen den Nenner des mit ihr zu vereinigenden Bruchs giebt, welcher die Summe von den gegebenen Brüchen ausmacht.

Bei bestimmten Zahlen pflegt man den hiedurch etwa erhaltenen unächten Bruch jedoch wieder in eine gemischte Zahl umzusetzen, weshalb auch, bei gleichen Zeichen der ganzen Zahl mit dem Bruche, die Vereinigung beider nur insoweit vorgenommen wird, wie dieser Bruch selbst noch Ganze enthält.

Beispiele.

$$\frac{a}{b} + c - d + \frac{f}{h} = c - d + \frac{ah+fb}{bh} = \frac{(c-d)\,bh + ah + fb}{bh};$$

$$\frac{3}{8} + 5 - \frac{1}{3} \quad 2 + \frac{4}{9} = 3 + \frac{27-24+32}{72} = 3\,\frac{35}{72};$$

$$6 + \frac{7}{8} - \frac{1}{5} + \frac{3}{4} - 2 = 4 + \frac{35-8+30}{40}$$

$$= 4 + \frac{57}{40} = 4 + 1 + \frac{17}{40} = 5\frac{17}{40}.$$

Subtraction.

§. 112.

Die Subtraction verwandelt sich, indem man dem Subtrahend das entgegengesetzte Zeichen giebt, in Addition zweier Größen. Die für die Addition der Brüche gegebenen Regeln treten also hier wiederum in Anwendung.

Beispiele. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$;

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{9} = \frac{27 - 20}{36} = \frac{7}{36};$$

$$\frac{a}{b} - \left(\frac{c}{d} - g + \frac{f}{m}\right) = \frac{a}{b} - \frac{cm - gdm + fd}{dm}$$

$$= \frac{adm - cmb + gdmb - fdb}{bdm};$$

$$6 - \frac{3}{5} = \frac{30}{5} - \frac{3}{5} = \frac{27}{5} = 5\tfrac{2}{5};$$

$$3\tfrac{1}{4} - 5\tfrac{2}{3} = \frac{13}{4} - \frac{17}{3} = \frac{39 - 68}{12} = -\frac{29}{12} = -2\tfrac{5}{12}.$$

Multiplication.

§. 113.

Der Erklärung der Multiplication gemäß, soll mit dem Multiplicand eben so operirt werden, wie mit der Einheit operirt ward, um aus ihr den Multiplicator zu bilden. Ist nun der Multiplicator ein Bruch, so entstand er aus der Einheit dadurch, daß man sie in so viele gleiche Theile zerlegte, als der Nenner angiebt, und einen solchen so oft setzte, als der Zähler anzeigt; mithin müssen auch diese beiden Operationen an dem Multiplicand vollzogen werden. Nun ist aber Zerlegung in gleiche Theile, Division durch eine ganze Zahl, gleich der Anzahl der gleichen Theile, worin zerlegt werden soll; wiederholtes Setzen einer und derselben Größe, Multiplication derselben mit einer ganzen Zahl, gleich der Anzahl des mehrmaligen Setzens. Daher die Regel für die Multiplication mit einem Bruche:

man dividire den Multiplicand durch den Nenner dieses Bruchs, und multiplicire das Resultat dieser Division durch seinen Zähler.

Die Ordnung beider Operationen, die mit dem Multiplicand vorzunehmen sind, darf verwechselt werden, d. h. man kann erst den Multiplicand mit dem Zähler des Multiplicators multipliciren, und dann dies Product durch den Nenner des Multiplicators dividiren. (Vergl. §. 95). In allgemeinen Zeichen, wo beide Operationen nur angedeutet werden, geht diese Verwechselung ihrer Ordnung aus dem bloßen Anblick des Resultats hervor; es ist nämlich, indem man nach der aufgestellten Regel verfährt:

$$m \cdot \frac{a}{b} = \frac{m}{b} \cdot a = \frac{ma}{b}$$

(letzteres nach §. 100).

Ist der Multiplicand eine ganze Zahl, so werden bei der Multiplication desselben mit einem Bruche jene Division und Multiplication an ihm vorgeschriebener Maaßen ausgeführt; indessen wird die Division desselben auch bei bestimmten Zahlen häufig nur angedeutet werden können.

Z. B. $5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

§. 114.

Ist aber auch der Multiplicand ein Bruch, so geschieht die Division desselben durch eine ganze Zahl, durch Multiplication seines Nenners mit derselben; die Multiplication mit einer ganzen Zahl, durch Multiplication seines Zählers mit derselben (§§. 100. 101), und so entsteht für die Multiplication eines Bruches mit einem Bruche die Regel:

man multiplicire den Zähler des Multiplicands mit dem Zähler, seinen Nenner mit dem Nenner des Multiplicators, und mache diese Producte wiederum zu Zähler und Nenner eines neuen Bruchs.

z. B. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;

$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$.

§. 115.

Da Multiplication und Division eines Bruchs durch eine ganze Zahl, nach §. 102, auch durch Division des Nenners und durch Division des Zählers an ihm ausgeführt werden können, so giebt es noch eine andere Art der Multiplication eines Bruchs mit einem Bruche, nämlich die:

den Zähler des ersten durch den Nenner des zweiten, und den Nenner des ersten durch den Zähler des zweiten zu dividiren. Hiernach ist

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a : d}{b : c}.$$

Indessen wird diese Methode nur dann mit Nutzen angewandt werden können, wenn die dabei vorkommenden Divisionen aufgehen, widrigenfalls man einen Bruchsbruch bekommt, welcher reducirt, auf die erstere allgemeinere Regel führt. Um aber in jenem Falle das Resultat der Multiplication sogleich in einem Bruche zu erhalten, dessen Zähler und Nenner kleinere Zahlen sind, darf man diese zweite Methode nicht aus den Augen lassen.

z. B. $\frac{8}{12} \cdot \frac{3}{4} = \frac{8 : 4}{12 : 3} = \frac{2}{4}$.

§. 116.

Vergleicht man die für die Multiplication an und mit Brüchen aufgestellten Regeln, so ergiebt sich, daß auch bei Brüchen und ganzen Zahlen oder bei Brüchen unter einander, Multiplicand und Multiplicator, wenn beide unbenannte Zahlen sind, unbeschadet des Products, verwechselt werden dürfen. Denn es ist

$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$ (§. 100);

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}. \text{ (§. 113), mithin}$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b}.$$

ferner ist:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \\ \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{bd} \end{array}\right\} \text{ (nach §. 114).}$$

folglich

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

§. 117.

Da bei der Multiplication von mehr als zwei Factoren in einander, zuerst das Product aus zweien gebildet, dieses mit dem dritten Factor u. s. w. multiplicirt wird, so ergiebt sich durch Wiederholung des vorstehenden Beweises und durch Anwendung der §§. 52. 53, daß allgemein:

bei beliebig vielen Factoren, welche aus ganzen Zahlen und Brüchen oder bloß aus Brüchen bestehen, die Ordnung, in welcher sie in einander multiplicirt werden, völlig willkührlich ist.

§. 118.

Bestehen die Factoren aus Theilen, so geschieht die Multiplication, wie §. 51 vorgeschrieben ist, indem jeder Theil des einen mit jedem Theil des andern Factors multiplicirt wird; und die im Vorhergehenden enthaltenen Regeln sind hinreichend, um diese Multiplication auszuführen, die Theile des einen oder andern Factors mögen ganze Zahlen oder Brüche oder gemischte Zahlen seyn. Nach geschehener Multiplication müssen die Partialproducte, nach den Regeln der Addition von Brüchen unter sich und Brüchen mit ganzen Zahlen, vereinigt werden. Man verlangt hierbei das Resul-

tat allemal so weit reducirt, daß auch bei Buchstaben-Größen zuletzt ein Bruch erscheint, in dessen Zähler freilich die Vereinigung von Theilen gewöhnlich nur angedeutet ist. Bei Zahlen ist es oft bequemer die Theile der Factoren erst zu vereinigen, und dann diese in einander zu multipliciren.

Beispiele.

1) $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\cdot\left(\frac{f}{g}+\frac{m}{n}\right)=\frac{af}{bg}-\frac{cf}{gd}+\frac{am}{bn}-\frac{cm}{dn}$

$$=\frac{afdn-cfbn+amdg-cmbg}{bgdn}.$$

2) $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}-h\right)\cdot\left(p-\frac{m}{n}\right)=\frac{ap}{b}-\frac{cp}{d}-ph-\frac{am}{bn}$

$$+\frac{cm}{dn}+\frac{hm}{n}=\frac{apdn-cpbn-phbdn-amd+cmb+hmdb}{bdn}$$

3) $\left(5-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+3\right)=\frac{13}{3}\cdot\frac{15}{4}=\frac{13\,.\,15}{3\,.\,4}=\frac{65}{4}=16\tfrac{1}{4}.$

Einige practische Regeln, die das Rechnen hierher gehöriger Exempel, besonders in Zahlen, erleichtern.

Division.

§. 119.

Die Division ist das Umgekehrte der Multiplication und soll wieder aufheben, was diese hervorbrachte. Mit einem Bruche ward multiplicirt, indem man durch seinen Nenner dividirte und durch seinen Zähler multiplicirte; um also durch einen Bruch zu dividiren, muß man:

mit seinem Nenner die zu dividirende Größe multipliciren, und diesen Quotienten durch seinen Zähler dividiren.

Dadurch würde also dasselbe geschehen, als wenn man mit einem Bruche multiplicirte, welcher zum Zähler den Nenner und zum Nenner den Zähler dieses Divisors hätte. Hieraus geht die mit der vorhin aufgestellten Regel gleichgeltende hervor:

um durch einen Bruch zu dividiren, kehre

man ihn um, und multiplicire nun den Dividend mit ihm, so entsteht der gesuchte Quotient.

Z. B. $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$;

$\frac{m}{n} : \frac{b}{c} = \frac{m}{n} \cdot \frac{c}{b} = \frac{mc}{nb}$.

§. 120.

Auch hier kann durch Anwendung des §. 115 noch eine zweite Art der Division eines Bruchs durch einen Bruch abgeleitet werden. Es ist nämlich auch:

$\frac{m}{n} : \frac{b}{c} = \frac{m}{n} \cdot \frac{c}{b} = \frac{m : b}{n : b}$, woraus die Regel folgt:

man dividire den Zähler des Dividends durch den Zähler des Divisors, und den Nenner des Dividends durch den Nenner des Divisors.

Für die Anwendung derselben gilt übrigens dasselbe, welches §. 115 bemerkt ist.

§. 121.

Jede ganze Zahl darf als ein Bruch betrachtet werden, dessen Zähler sie selbst, dessen Nenner die Einheit ist (§. 96). Die Division durch eine ganze Zahl kann also auch als Multiplication durch einen Bruch, der die Einheit zum Zähler und sie selbst zum Nenner hat, angedeutet werden.

$$a : b = a : \frac{b}{1} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Ist der Dividend ein Bruch, so giebt diese Art, ihn durch eine ganze Zahl zu dividiren, dasselbe Resultat, worauf die aus andern Principien abgeleitete allgemeine Regel des §. 101 führte, die aber vorhergehen mußte, um überhaupt die Ausführung der mit Brüchen vorzunehmenden Operationen zu vermitteln. Dort war $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$; hier wird ebenfalls

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}.$$

§. 122.

Besteht der Dividend aus Theilen, so wird nach §. 75 jeder Theil desselben, durch den Divisor dividirt, die einzelnen Theile des Quotienten geben. Diese müssen demnächst zu einer Summe zusammengezogen werden. Bei Zahlen vereinigt man gewöhnlich zuerst die Theile des Dividends.

Beispiele.

1) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) : \frac{n}{m} = \frac{am}{bn} + \frac{cm}{dn} = \frac{amd + cmb}{bdn}$.

2) $\left(a - \frac{c}{d}\right) : \frac{n}{m} = \frac{am}{n} - \frac{cm}{dn} = \frac{amd - cm}{dn}$.

3) $\left(5 + \frac{3}{4} - \frac{1}{9}\right) : \frac{2}{3} = \frac{203}{36} : \frac{2}{3} = \frac{203 . 3}{36 . 2} = \frac{203}{24} = 8\frac{11}{24}$.

§. 123.

Ist der Divisor eine aus Theilen zusammengesetzte Größe, es mögen diese sämmtlich Brüche, oder Brüche und ganze Zahlen seyn, so ist, ehe man die Regel des §. 119 anwenden kann, die Vereinigung sämmtlicher Theile desselben zu einem einzigen Bruche erforderlich. (Man vergleiche §. 76).

Z. B. $a : \left(\frac{m}{n} + \frac{c}{d}\right) = a : \frac{md + cn}{nd} = \frac{and}{md + cn}$.

§. 124.

Wenn Dividend und Divisor beide zusammengesetzte Größen sind, die aus Brüchen oder gemischten Zahlen bestehen, so ist es zur Anwendung der vorhergehenden Regeln am bequemsten, beide erst in einen Bruch durch Vereinigung ihrer respectiven Theile umzusetzen.

Beispiele.

1) $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) : \left(\frac{m}{n} - g + \frac{p}{q}\right) = \frac{ad - bc}{bd} : \frac{mq - gnq + pn}{nq}$,

$= \frac{(ad - bc)nq}{(mq - gnq + pn)bd}$ oder auch $= \frac{adnq - bcnq}{mqbd - gnqbd + pnbd}$,

2) $\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{2} + \frac{5}{8}\right) : \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{31}{56} : \frac{13}{15} = \frac{465}{728}$.

Anmerk. Man ersieht hieraus zugleich, wie die Division in

Brüchen allemal auf eine Division in ganzen Zahlen führt; denn der als Resultat der ersten entstehende Bruch kann wiederum als ein Quotient betrachtet werden, auch die darin angedeutete Division, so viel als möglich, weiter entwickelt werden, nämlich in dem Falle, in dem der Zähler den Nenner als Factor enthält.

§. 125.

Dadurch, daß man den Bruch als einen Quotienten ansieht, können auch Bruchsbrüche auf eine andere Art, wie die im §. 103 vorgeschriebene, in einfache Brüche verwandelt werden. Man führt nämlich die Division des Zählers durch den Nenner nach §. 119 wirklich aus. Z. B.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \text{ (wie §. 103).}$$

Wenn der Zähler oder Nenner eines Bruchs oder beide aus Theilen zusammengesetzt sind, welche selbst aus Brüchen oder vermischten Zahlen bestehen, so ist die letzte Art der Reduction ohne Weiteres zulässig, z. B.

$$\frac{a+\frac{b}{c}}{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}} = \left(a+\frac{b}{c}\right) : \left(\frac{n}{m}+\frac{p}{q}\right)$$

$$= \frac{ac+b}{c} : \frac{nq+pm}{mq} = \frac{(ac+b)mq}{(nq+pm)c}.$$

Wollte man aber die §. 103 gegebene Regel in Anwendung bringen, so müßten zuerst die im Zähler vorkommenden Divisoren zum Divisor des ganzen Zählers gemacht, d. h. seine Theile müßten auf gleichen Nenner gebracht, und eben so müßte mit dem Nenner verfahren werden; dann würde nach dem angeführten §., der Divisor des Nenners Factor im Zähler, der des Zählers Factor im Nenner. Das Resultat bleibt sich gleich, nur daß die Gründe der Behandlung verschieden hergeleitet sind.

Sechstes Capitel.

Von den Decimalbrüchen.

§. 126.

Jeder Bruch, dessen Nenner eine höhere Einheit unsers Zahlensystems ist, wird ein Decimalbruch genannt.

Das Eigenthümliche dieser Brüche besteht darin, daß man ihnen die Form ganzer Zahlen geben kann: **man schreibt nur ihren Zähler, und erkennt den Nenner aus dem Range, den die einzelnen Ziffern des erstern haben.** Dadurch werden die Rechnungsarten mit ihnen, denen mit ganzen Zahlen ähnlich, und bequemer als die mit Brüchen von der gewöhnlichen Form.

§. 127.

Beim Schreiben eines Decimalbruchs bringt man nämlich das Gesetz, welches im Fortlaufe der Ziffern einer vielziffrigen Zahl des decadischen Zahlensystems herrscht: daß die Einheit jeder, von der Linken zur Rechten folgenden Ziffer, um ein Zehnfaches kleiner ist, als die der ihr vorhergehenden, — über die Stelle der Einer hinaus, ferner noch in Anwendung; indem diese Stelle durch ein hinter ihr gesetztes Komma (den Decimalstrich) kenntlich gemacht wird. Da in ihr einfache Einheiten gezählt werden, so sind es in der ersten Stelle nach ihr Zehntheile; in der darauf folgenden Hunderttheile der Einheit u. s. w., welche durch deren Ziffern angegeben werden.

Im Falle, daß keine Ganze vorkommen, füllt man ihre Stelle mit einer Null aus; so wie dies Zeichen auch nach

dem Komma dazu dient, die Stellen zu besetzen, für welche keine Einheiten vorhanden sind.

So schreibt man z. B.

$$4 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} = 4,\ 35;$$

$$\frac{6}{1000} = 0,\ 006.$$

Will man umgekehrt einen auf diese Art geschriebenen Decimalbruch wieder mit untergesetztem Nenner darstellen, so kann es ohne Schwierigkeit geschehen: jeder Ziffer nach dem Komma wird als einem Zähler ein Nenner gegeben, welcher eine höhere Einheit so hoch im Range ist, als die Zahl, die angiebt, um wie viele Stellen diese Ziffer von dem Komma absteht; — und diese einzelnen Brüche werden vereinigt. Hiernach ist z. B.

$$3{,}405 = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{1000};$$

$$0{,}4308 = \frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{8}{10000}.$$

§. 128.

Wenn der Decimalstrich um eine Stelle zur Rechten gerückt wird, so erhöht dies den Rang jeder Ziffer um eins; denn die Einer werden dadurch Zehner, die Zehntheile werden Einer u. s. w.; jede Ziffer wird mithin mit 10 multiplicirt, daher auch die ganze Zahl. Wird das Komma um mehrere Stellen von der Linken zur Rechten gerückt, so hat man also eben so oft mit 10 multiplicirt, als die Anzahl dieser Stellen beträgt, d. h. mit einer höhern Einheit von eben dem Range. Z. B.

$$35{,}0034 \ .\ 1000 = 35003{,}4\ .$$

Wenn das Komma hierdurch hinter der letzten Ziffer zu stehen kommt, so kann es natürlich ganz wegfallen, und wenn nicht genug Stellen vorhanden sind, so müssen zur Rechten Nullen angehängt werden. Z. B.

$$35,0034 \,.\, 1000000 = 35003400.$$

Umgekehrt ist die Verrückung des Decimalstrichs von der Rechten zur Linken, Division durch eine höhere Einheit von dem Range, als die Anzahl der Stellen angiebt, um welche derselbe fortgerückt ist; z. B.

$$834,23 : 100 = 8,3423.$$

Reichen die vorhandenen Ziffern nicht hin, um bei einer solchen Division das Komma die nöthige Anzahl von Stellen zu versetzen, so füllt man die fehlenden Stellen mit Nullen aus; z. B.

$$834,23 : 1000000 = 0,00083423 \,.$$

§. 129.

Vermöge der Bemerkung des vorigen §, läßt sich zunächst auf eine sehr einfache Art ein durch Hülfe des Kommas geschriebener Decimalbruch mit untergesetztem Nenner darstellen und umgekehrt. Im ersten Falle rücke man das Komma bis ans Ende, wo es aber wegbleibt; dadurch ist die Zahl mit einer höhern Einheit des Ranges multiplicirt, als Stellen nach dem Komma folgten; indem nun eben diese Einheit als Nenner unter die erhaltene Zahl gesetzt wird, hebt man jene Multiplication durch die Andeutung einer Division mit derselben Größe wieder auf. Z. B.

$$3,405 = \frac{3405}{1000};$$

$$0,4308 = \frac{4308}{10000};$$

Auf solche Weise erhält man dasselbe Resultat, das §. 127 gab, und zwar so, daß die dort erhaltenen einzelnen Brüche hier sogleich vereinigt sind.

Als eine Folgerung hieraus kann man den allgemeinen Satz aufstellen:

den Zähler eines Decimalbruchs bildet die gegebene Zahl, in welcher der Decimalstrich wegge-

lassen ist; den Nenner eine höhere Einheit, deren Rang die Anzahl der Stellen, die nach demselben folgen (die Anzahl der Decimalstellen) bestimmt.

Umgekehrt ergiebt sich hieraus, daß, wenn ein mit untergesetztem Nenner geschriebener Decimalbruch durch Hülfe des Decimalstrichs ausgedrückt werden soll, folgende Regel dienen wird:

man lasse den Nenner weg, und setze in dem Zähler ein Komma so, daß auf ihn eben so viele Stellen folgen, als der Rang des Nenners Einheiten enthält. Z. B.

$$\frac{74903}{100} = 749{,}03;$$

$$\frac{58}{100000} = 0{,}00058.$$

Hierbei werden also Nullen vorzusetzen seyn, wenn der Zähler weniger Stellen hat, als der Rang des Nenners Einheiten enthält, wie im letzten Beispiele zu sehen ist.

Anmerkung. Es wird künftig immer vorausgesetzt, daß Decimalbrüche in der letzten Gestalt geschrieben sind.

§. 130.

Um die Vortheile, welche die Rechnung mit Decimalbrüchen gewährt, nicht auf eine sehr kleine Zahl von Brüchen, nämlich auf den Fall zu beschränken, wenn sie zufällig als Decimalbrüche vorkommen, ist es wesentlich: jeden andern Bruch in einen Decimalbruch verwandeln zu können. Wir werden zwar sehen, daß dies bei wenigen im strengen Sinn, sondern bei den meisten nur annäherungsweise angeht; bei diesen kann aber die Annäherung so weit getrieben werden, als der Zweck irgend einer Rechnung fordert, um darin den Decimalbruch anstatt des gemeinen Bruchs gebrauchen zu dürfen.

§. 131.

Die allgemeine Regel für die Verwandlung eines Bruchs in einen Decimalbruch ist:

man multiplicire den Zähler des Bruchs mit einer höhern Einheit, so hoch im Range, daß sich der Nenner desselben in dies Product dividiren läßt; dem entwickelten Quotienten gebe man eben jene höhere Einheit zum Nenner.

Der Nenner eines Bruchs ist nämlich nicht in den Zähler desselben theilbar, denn sonst wäre der Bruch eine ganze Zahl; multiplicirt man aber den Zähler mit einer gewissen höhern Einheit, so wird der Nenner sich in dies Product ohne Rest dividiren lassen, wenn er nur in der höhern Einheit aufgeht (§. 73); wird nun der dadurch erhaltene Quotient durch dieselbe höhere Einheit dividirt, d. h. ihm diese als Nenner gegeben, so ist der anfängliche Bruch, durch einerlei Zahl multiplicirt und dividirt, also im Werthe unverändert, und aus ihm ein Decimalbruch geworden.

Z. B. $\frac{3}{4} = \frac{3\,.\,100}{4} : 100 = 3\,.\,25 : 100$

$= 75 : 100 = 0,75.$

§. 132.

Es kommt bei dieser Verwandlung darauf an, eine höhere Einheit zur Multiplication des Zählers zu wählen, in welcher der Nenner des Bruchs aufgeht. Nun ist zu bemerken, daß, da jede höhere Einheit in die einfachen Factoren 2 und 5 zerlegt werden kann, nur eine solche Zahl darin aufgehen wird, welche aus keinen andern Factoren besteht (§. 82). Bei einem Bruche, dessen Nenner andere Factoren als 2 und 5 enthält, sucht man daher vergebens eine höhere Einheit, die mit dem Zähler multiplicirt ein Product gäbe, in das sich der Nenner ohne Rest dividiren ließe, weil

sich nicht gleiche in diesem Producte finden werden, die sich gegen alle Factoren des Divisors aufheben ließen.

Je höher aber eine solche Einheit im Range ist, desto kleiner wird der ächte Bruch, welcher wegen des Restes in dem vollständigen, durch dieselbe höhere Einheit dividirten Quotienten, erscheint. Hierauf gründet sich das Verfahren, einen Bruch, dessen Nenner unter die erwähnte Kategorie fällt, annäherungsweise in einen Decimalbruch zu verwandeln. Man nimmt nämlich die höhere Einheit, wodurch man den Zähler desselben multiplicirt, so hoch im Range, daß der Rest, welcher bei der Division des Nenners in dies Product bleibt, außer Acht gelassen werden darf, indem der ächte Bruch, welcher ihn zum Zähler, zum Nenner das Product der höhern Einheit in den Nenner des anfänglichen Bruchs hat, so klein ist, daß er für den Zweck der Rechnung aus dem Quotienten wegbleiben kann. Auch erhellet hieraus, daß man es bei der Verwandlung eines Bruchs in einen Decimalbruch, der ihm bis auf ein gewisses Kleines gleich kommt, in seiner Gewalt hat, dieses so gering werden zu lassen, daß jede Grenze darin überschritten wird. Z. B.

$$\frac{5}{12} = \frac{5\,.\,1000000}{12} : 1000000 = \left(416666 + \frac{8}{12}\right) : 1000000$$
$$= 0{,}416666 + \frac{8}{12000000}.$$

Setzt man also

$\frac{5}{12} = 0{,}416666$, so vernachlässigt man $\frac{8}{12000000}$. Wäre dieser Bruch nicht klein genug, um für den Zweck einer gewissen Rechnung außer Acht zu bleiben, so hätte man nur nöthig, die höhere Einheit, womit zuerst der Zähler 5 des gegebenen Bruchs multiplicirt ward, noch höher anzunehmen.

Beispiele über die Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche — wie man dabei am bequemsten verfährt. —

§. 133.

Bei der Division des Nenners eines Bruchs in das Product seines Zählers in eine höhere Einheit, wird, im Fall sich diese Division nicht schließt, wenn nur jene höhere Einheit hoch genug genommen wird, früher oder später ein Rest entstehen, welcher schon einmal vorgekommen ist, und da immer Nullen die folgenden Stellen des Dividends ausmachen, so müssen von da an auch dieselben Ziffern sich im Quotienten wiederholen, welche der Reihe nach darin vorher erschienen; dieser besteht also gleichsam aus einer Periode von Ziffern, weshalb man den Decimalbruch, der dadurch hervorgeht, einen *periodischen* nennt. So findet sich z. B.

$$\frac{5}{7} = 0{,}714285714285714285 \ldots\ldots$$

worin die Periode aus 6 Ziffern besteht;

$$\frac{8}{9} = 0{,}888 \ldots.$$

worin die Periode eine Ziffer hat.

Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, daß die Periode eines solchen Decimalbruchs höchstens so viel Stellen, weniger eine, haben kann, als der Nenner des entsprechenden gemeinen Bruchs Einheiten enthält; denn mehr verschiedene Reste können nicht vorkommen. Indessen wird, bei gewisser Beschaffenheit des Nenners, die Periode auch weniger Ziffern enthalten, als nach dieser allgemeinen Bestimmung der Fall seyn müßte. Eine nähere Untersuchung darüber gehört aber nicht für die Anfangsgründe der Arithmetik.

§. 134.

Nach diesen Vorbereitungen, welche die Natur der Decimalbrüche, hinsichtlich der gegenseitigen Beziehung der Ziffern ihrer Zähler, und die Verwandlung anderer Brüche in Decimalbrüche, betrafen, ist es leicht, die vier arithmetischen Grundoperationen mit ihnen vorzunehmen. Man hat dabei insbesondere zu bemerken, daß es verlangt wird, das Resul-

tat

tat ihrer Verknüpfungen immer wieder als einen Decimalbruch darzustellen, denn ohne dies würden sich die Regeln dafür schon aus den Rechnungsarten mit Brüchen überhaupt ergeben, indem man den Decimalbrüchen nur die gewöhnliche Bruchsgestalt geben könnte.

Addition und Subtraction.

§. 135.

Sollen Decimalbrüche addirt oder subtrahirt werden, so geschieht dies nach denselben Regeln, die für die Addition und Subtraction vielziffriger ganzer Zahlen gegeben sind; denn es herrscht in der Rangfolge der Ziffern auch nach dem Decimalstriche dasselbe Gesetz, welches vor demselben die Ziffern unter sich beobachten.

Es ist hierbei also zuerst erforderlich, die Ziffern der zu vereinigenden Zahlen ihrem Range gemäß unter einander zu schreiben. Man verhält sich alsdann beim Zusammenzählen, hinsichtlich des Uebertragens der Einheiten einer gewissen Ordnung, wenn ihre Menge gleich der Grundzahl geworden, zu denen der nächst höhern, auf gleiche Weise, wie es bei ganzen Zahlen vorgeschrieben ist; und es gelten auch beim Abziehen, in Rücksicht des sogenannten Borgens, dieselben Regeln, die dort gegeben sind. Bei der Ausführung dieser Operationen ist noch zu bemerken, daß man hinter die Decimalstellen beliebig viele Nullen hängen kann; denn dadurch wird Zähler und Nenner des Decimalbruchs mit einerlei höhern Einheit multiplicirt (§. 129). Eben so darf man auch, wenn bloß Ganze vorhanden sind, nach einem hinter die niedrigste Ziffer gesetzten Komma, willkührlich viele Nullen zur Ausfüllung von Decimalstellen schreiben.

Beispiele. 1) Es sollen addirt werden:

$$534{,}0532 + 90{,}259 + 0{,}000048$$

so setzt man:

534,0532
90,259
0,000048

daher die Summe 624,312248.

2) Soll von der Zahl 5,083 die 0,00834 abgezogen werden, so setzt man:

5,08300
0,00834

daher die Differenz 5,07466.

Multiplication.

§. 136.

Die allgemeine Regel für die Multiplication zweier Decimalbrüche ist:

man multiplicire die Zähler derselben, also die gegebenen beiden Zahlen, worin der Decimalstrich weggelassen ist, und setze in ihrem Producte ein Komma so, daß man eben so viele Decimalstellen erhält, als solcher in den zu multiplicirenden Brüchen zusammen enthalten waren.

Der Beweis dieser Regel folgt leicht aus der für die Multiplication zweier Brüche, wornach das Product ihrer Zähler, den Zähler, das Product ihrer Nenner, den Nenner eines neuen Bruchs geben soll. Nun ist das Product der Zähler zweier Decimalbrüche, das Product der ganzen Zahlen, welche durch Hinwegnahme des Kommas entstehen; dies muß noch durch das Product der Nenner derselben dividirt werden. Der Nenner jedes Decimalbruchs ist aber eine höhere Einheit, im Range so hoch als die Anzahl der Decimalstellen; das Product von beiden Nennern wird mithin wieder eine solche, deren Rang gleich der Summe der Decimalstellen beider Brüche ist (§. 59); und die Division dadurch geschieht, anstatt sie als Nenner unterzusetzen, durch die Stellung des Kommas auf die angezeigte Weise.

Ist der eine Factor eine ganze Zahl, so ändert dies die obige Regel nicht ab, weil man dessen Nenner als Eins d. h. als eine Einheit der Ordnung Null annehmen darf. —

Beispiele. $3{,}4 \,.\, 0{,}268 = \frac{34 \,.\, 268}{10000} = 1{,}0112;$

$$0{,}0034 \,.\, 0{,}012 = \frac{34 \,.\, 12}{10000000} = 0{,}0000408;$$

$$58 \,.\, 2{,}005 = \frac{58 \,.\, 2005}{1000} = 116{,}290 = 116{,}29.$$

Division.

§. 137.

Bei der Division in Decimalbrüchen kann man drei Fälle unterscheiden.

1. Haben Dividend und Divisor gleichviel Decimalstellen, so findet man den Quotienten durch die Division der ganzen Zahlen, welche nach Hinwegnahme der Decimalstriche aus beiden als Dividend und Divisor erscheinen. — Der Quotient zweier Brüche von gleichen Nennern ist nämlich gleich dem Quotienten ihrer Zähler; wie aus der Anwendung der für die Division in Brüchen gegebenen Regel auf einen solchen Fall folgt. Denn es ist allgemein:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a \,.\, b}{b \,.\, c} = \frac{a}{c} = a : c.$$

Hiernach ist z. B.

$$86{,}04 : 0{,}12 = 8604 : 12 = 717.$$

2. Sind im Dividend mehr Decimalstellen, als im Divisor, so werden, nachdem der Zähler des ersten durch den des zweiten dividirt ist, in diesem Quotienten so viele Stellen als Decimalen abgeschnitten, als der Unterschied der Decimalstellen im Dividend und Divisor beträgt. — Denn, nachdem der Zähler des Dividends durch den Zähler

des Divisors dividirt ist, muß, der Regel der Division in Brüchen (§. 120) gemäß, auch der Nenner des Dividends durch den des Divisors dividirt werden; aus jenem wird also eine höhere Einheit, deren Rang gleich der Differenz der Ränge beider ist, und die Andeutung eines solchen Nenners für den Quotienten der Zähler geschieht auf die vorgeschriebene Art, durch das Abschneiden so vieler Decimalstellen als der Rang desselben angiebt. Z. B.

$$2{,}1065 : 0{,}5 = \frac{21065 : 5}{10000 : 10} = \frac{4213}{1000} = 4{,}213.$$

3. **Wenn der Divisor mehr Decimalstellen hat als der Dividend, so muß der Quotient ihrer Zähler durch eine höhere Einheit multiplicirt werden, deren Rang gleich dem Unterschiede der Decimalstellen des Divisors und Dividends ist.**

Der Beweis hierfür geht, wie in den vorhergehenden Fällen, aus bekannten Regeln für die Division in Brüchen hervor. — Da der Dividend mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt werden muß, so wird der Nenner des letztern Factor in dem Zähler des erstern; und in ihm kann die höhere Einheit, welche Nenner des Dividends und kleiner im Range ist, gehoben werden, so daß nur eine solche als Factor bleibt, die im Range gleich dem Unterschiede beider ist; durch sie muß mithin der berechnete Quotient der Zähler des Dividends und Divisors noch multiplicirt werden. Z. B.

$$4847{,}1 : 0{,}321 = \frac{48471 \cdot 1000}{10 \cdot 321} = \frac{48471 \cdot 100}{321}$$

$$= \frac{48471}{321} \cdot 100 = 151 \cdot 100 = 15100.$$

§. 138.

Wenn bei der Division der Zähler zweier Decimalbrüche durch einander ein Rest bleibt, so ist für die Bestimmung des Quotienten dieser Brüche noch Folgendes zu bemerken.

Im ersten Falle, wo der Quotient der Zähler sogleich der Quotient der Brüche selbst ist, bringt dieser Rest einen ächten Bruch in den Quotienten, welcher zum Zähler den Rest, zum Nenner den Zähler des Divisors hat. Dieser Bruch kann daher ohne Weiteres in einen Decimalbruch verwandelt, und dann mit dem Quotienten vereinigt werden. Aus §. 131 ergiebt sich, daß dies geschieht, indem man dem Reste eine Null anhängt und die Division fortsetzt, dem dabei etwa wieder bleibenden Reste abermals eine Null anhängt und weiter dividirt, und so fort; die dadurch successive im Quotienten erscheinenden Ziffern sind der Reihe nach, die 1ste, 2te u. s. w. Decimalstelle.

Wenn aber der Dividend mehr Decimalstellen als der Divisor hat, der Quotient der Zähler derselben also noch durch eine höhere Einheit zu dividiren ist, so muß auch der ächte Bruch, welcher dem Quotienten wegen eines bei der Division der Zähler gebliebenen Restes beizufügen ist, durch eben die höhere Einheit dividirt werden. Bei der Auflösung desselben in einen Decimalbruch hat man hierauf Rücksicht zu nehmen, und so findet sich, daß die, durch Anhängen von Nullen an den Rest und Fortsetzung der Division hervorgehenden Ziffern, diejenigen Decimalstellen werden, welche der Reihe nach folgen, nachdem vorher der Decimalstrich, nach der Regel des 2ten Falles des vorhergehenden §., in dem bis zu diesem Reste gefundenen Quotienten bestimmt ist.

Wenn endlich im dritten Falle der Quotient der Zähler der zu dividirenden Decimalbrüche, noch mit einer höhern Einheit multiplicirt werden muß, so wird auch der Rest, welcher bei der Division jener Zähler blieb, dadurch multiplicirt und die Division fortgesetzt; so daß nicht eher Decimalstellen in dem Quotienten entstehen, bis nach dieser Multiplication ein Rest erscheint, der kleiner als der Divisor (der

Zähler des als Divisor anfänglich gegebenen Decimalbruchs) ist, und nun tritt der erste Fall dieses §. ein.

Wie die Division in Decimalbrüchen allemal auf den ersten Fall des §. 137 zurückzubringen ist, und wie dies auf dieselben Regeln führt, die für die übrigen Fälle und wegen des Restes abgeleitet sind. In welchem Falle eine solche vorherige Umänderung der Form zweier Decimalbrüche bei ihrer Division bequem ist. — Beispiele hierüber.

§. 139.

Bei der Division zweier Decimalbrüche könnte noch der Fall eintreten, daß der Zähler des Divisors größer als der des Dividends ist, sich also die Division des letztern durch den erstern nicht wirklich vornehmen lassen würde; dann muß der Dividend zuvor mit einer höhern Einheit multiplicirt werden, die so gewählt wird, daß diese Division geschehen kann. Der gefundene Quotient wird dafür, nachdem die Vorschriften des §. 137 hinsichtlich des Decimalstrichs befolgt sind, durch dieselbe höhere Einheit dividirt.

Man muß also Aehnliches bemerken, wie bei dem Reste im vorigen §; da hier eigentlich der Fall eintritt, indem ein ächter Bruch, der selbst noch mit einer höhern Einheit zu multipliciren oder zu dividiren ist, in einen Decimalbruch verwandelt werden soll; — ein Fall, dessen Untersuchung in den letzten beiden Puncten jenes §. ebenfalls enthalten ist.

Beispiele.

$$0{,}53 : 0{,}00846 = \frac{53}{846} \cdot 1000 = \frac{53000}{846} = 62{,}6 \ldots;$$

$$0{,}00053 : 8{,}46 = \frac{53}{846} : 1000 = \frac{530000}{846} : 10000000$$

$$= 626{,} \ldots : 10000000 = 0{,}0000626 \ldots.$$

§. 140.

Das Resultat vieler Rechnungsoperationen erscheint oft

als ein Decimalbruch, der sich nicht schließt (worin die Decimalstellen ins Unendliche fortlaufen), und wird dann annäherungsweise dargestellt, indem man mit einer gewissen Decimalstelle abbricht. Jemehr Stellen bestimmt sind, desto näher wird ein solcher Bruch offenbar dem Werthe kommen, wovon er die Entwickelung ist. Nimmt man nun mit dergleichen unvollständigen Decimalbrüchen selbst wieder Operationen vor, so werden die dadurch entstehenden neuen Brüche gewöhnlich auf noch wenigere Decimalstellen richtig angesehen werden dürfen, als auf die, bis zu welcher jene entwickelt waren; weil die Ausführung dieser Operationen auf eine frühere Stelle in ihnen Einfluß haben könnte, wenn sie selbst auf spätere bestimmt wären. — Auch in dem Falle, worin sich ein Decimalbruch schließt, kann es der Zweck der Rechnung mit sich bringen, davon nur gewisse Decimalstellen beizubehalten und spätere zu vernachlässigen.

§. 141.

Es zeigt sich leicht, daß man die letzte Decimalstelle um 1 erhöhen wird, wenn die darauf folgende, falls der Decimalbruch weiter entwickelt würde, 5 oder größer als 5 ist; denn dadurch kömmt die Zahl dem wahren Werthe näher, als die, worin dies nicht geschähe. Wenn z. B. in dem Bruche 15,7138524 .... nur die vierte Decimalstelle beibehalten werden soll, so nimmt man dafür 15,7139 und nicht 15,7138; weil ersterer weniger von dem gegebenen unterschieden ist, als der zweite Bruch; es ist nämlich:

$$15{,}7139 - 15{,}7138524 = 0{,}0000476 \text{ und}$$
$$15{,}7138524 - 15{,}7138 = 0{,}0000524.$$

§. 142.

Multiplicirt man einen Decimalbruch mit einer einfachen Zahl, und verlangt das Product nur auf wenigere Decimalstellen als er hat, so muß die der bestimmten Stelle im ge-

gebenen Bruche nachfolgende noch multiplicirt werden, und die daraus hervorgehenden Einheiten vom nächst höhern Range müssen in jene Stelle übertragen werden, denn sonst wäre das Product nicht bis auf sie richtig, eben weil es noch Einheiten für sie hergiebt. Um z. B. das Product von 4,025837 . . . in 6 auf die dritte Decimalstelle anzugeben, multiplicirt man auch die Ziffer in der 4ten Stelle, nämlich 8, mit 6, welches 48 giebt, und addirt also 4 zu der niedrigsten Stelle des Products 4,025 in 6. Da hier durch jene Multiplication 48 entstand, so wird außerdem noch eine Einheit in die 3te Decimalstelle übertragen, da die Ziffer der 4ten Decimalstelle (8) größer als 5 würde (§. 141). Das Product aus 4,025837 . . . in 6 ist demnach bis auf die 3te Decimalstelle = 24,155. — Dasselbe ist unter übriger Berücksichtigung zu beobachten, wenn man mit einer Ziffer von gewissem Range multiplicirt, z. B. mit 60, wobei man natürlich den Rang der multiplicirten Ziffern auch um 1 erhöht (§. 59).

Abgekürzte Multiplication.

§. 143.

Wenn man die Multiplication mit einer vielziffrigen Zahl dadurch ausführt, daß man zuerst mit ihrer höchsten Ziffer, dann mit der des niedrigern Ranges u. s. w., also mit den einzelnen Ziffern von der Linken zur Rechten, den Multiplicand multiplicirt, und den Rang der einzelnen Producte nach §. 59 gehörig bestimmt, so kann man den Beitrag übersehen, den diese partiellen Multiplicationen in die verschiedenen Stellen des Products bringen. — Dies wird ein Beispiel erläutern. Das Product aus den Zahlen 58093 und 2714 werde nämlich, wie nachstehend, berechnet:

58093	
2714	
116186	
40665	1
580	93
232	372
157664	402

Man sieht hieraus, daß die Multiplication mit der zweiten Ziffer des Multiplicators (links anfangend) an der niedrigsten des Multiplicands nur die Einheiten in die entsprechende Stelle des Products bringt, welche übertragen werden. Die Multiplication mit der dritten Ziffer des Multiplicators an der niedrigsten des Multiplicands bringt nichts in jene Stelle; die mit der folgenden noch weniger, u. s. w.

Ist nun der Multiplicand ein Decimalbruch, und soll das Product nur bis auf die Decimalstelle berechnet werden, welche das Product aus seiner letzten Stelle in die höchste Ziffer des Multiplicators bestimmt, so folgt, daß man dabei, indem die partiellen Multiplicationen wie oben mit den Ziffern des Multiplicators von der Linken zur Rechten ausgeführt werden, successive eine Ziffer des Multiplicands von der Rechten zur Linken auslassen kann; — d. h., daß man mit der zweiten Ziffer des Multiplicators bei der zweiten des Multiplicands (von der Rechten an), mit der dritten Ziffer des Multiplicators bei der dritten des Multiplicands (von der Rechten an) u. s. w. zu multipliciren anfangen wird, jedoch mit Berücksichtigung dessen, was im vorigen §. vorgeschrieben ist. Aus der Ansicht der hier nachfolgenden Beispiele wird das Weitere dieses Verfahrens, welches man die verkürzte Multiplication der Decimalbrüche nennt, hinlänglich klar werden. Der Decimalstrich muß im Producte so stehen, daß, wie oben auch vorausgesetzt ward, die letzte Decimalstelle diejenige werde, welche dem Producte aus der höchsten Stelle

des Multiplicators in die niedrigste (letzte zur Rechten) des Multiplicands gemäß ist. Wenn z. B. die niedrigste Stelle des Multiplicands die 7te, und die höchste des Multiplicators die 3te Decimalstelle ist, so würde die Stelle, bis zu welcher hiernach das Product berechnet wird, die 10te Decimalstelle seyn, und vielleicht vorzusetzende Nullen in letzterem erforderlich werden. Besteht aber der Multiplicator aus einer ganzen Zahl, deren höchste Ziffer z. B. vom 3ten Range ist, und wäre wie vorher die niedrigste Stelle des Multiplicands die 7te Decimalstelle, so würde die niedrigste Stelle des Products die 4te Decimalstelle. Der Zweck einer Rechnung wird ergeben, ob daher bei gewisser Beschaffenheit beider Factoren die abgekürzte Multiplication anwendbar ist oder nicht.

Beispiele.

I.
Md. 0,521837
Mtor. 0,00724
3652859
104367
20873
Prod. 0,003778099

II.
Md. 82,0059473
Mtor. 3,1518
2460178419
82005947
41002974
820059
656047
Prod. 258,4663446

III.
Md. 9,3104826
Mtor. 0,0015058
93104826
46552413
465524
74483
Prod. 0,0140197246

IV.
Md. 869,47839
Mtor. 0,08428
695582712
34779136
1738957
695582
Prod. 73,2796387

Anmerkung. Es ist leicht zu sehen, wie man verfährt, wenn man noch wenigere Decimalstellen im Producte haben wollte, als diese Bestimmung ergiebt. Sollten darin z. B. nur 7 Decimalstellen beibehalten werden, so würde man in dem Beispiele №. III mit der ersten Ziffer des Multiplicators

sogleich bei der vierten des Multiplicands die Multiplication anfangen, und die letzten drei des letzten schon weglassen, jedoch die Einheiten aus der Multiplication der fünften desselben übertragen u. s. w.

Abgekürzte Division.

§. 144.

Bei der abgekürzten Division der Decimalbrüche bildet man die Partialproducte aus dem Divisor in die einzelnen Theile des Quotienten, welche allmählich vom Dividend abgezogen werden, nach den Regeln der abgekürzten Multiplication. Die Richtigkeit des anzuwendenden Verfahrens beruht hier darauf, daß das Product aus dem Quotienten in den Divisor dem Dividend bis auf die letzte von ihm aufgenommene Decimalstelle gleich seyn soll; daher auf spätere Stellen, die dies Product geben möchte, keine Rücksicht zu nehmen ist. Sobald also eine Ziffer im Quotienten entsteht, deren Rang es mit sich bringt, daß das Product aus ihr in den Divisor einen Decimalbruch giebt, dessen niedrigste Stelle weiter hinabreicht, als die niedrigste des Dividends, so wird man schon bei der Bestimmung dieser Ziffer des Quotienten die letzte Ziffer des Divisors weglassen, so wie auch bei der wirklichen Bildung dieses Partialproducts; — nur ist dabei das, was §. 142 vorgeschrieben wurde, in Anwendung zu bringen. — Von hier an tritt die eigentliche abgekürzte Division ein, und man läßt nun successive eine Stelle von der Rechten zur Linken vom Divisor weg, wodurch es jedesmal möglich wird, mit letzterem in den vom Dividend gebliebenen Rest, der sonst kleiner als jener seyn würde, zu dividiren. Vorher aber werden die einzelnen Ziffern des Quotienten nach dem gewöhnlichen Divisions-Verfahren aufgesucht. Die Bestimmung des Decimalstrichs im Quotienten geht aus den frühern Regeln und daraus her-

vor, daß man darauf achtet, daß das Product aus dem Divisor in den Quotienten, hinsichtlich des Ranges, mit dem des Dividends übereinstimmt. In mehreren Fällen wird man hier dabei auch noch durch die Bemerkung geleitet, daß das Weglassen einer Decimalstelle am Ende des Divisors mit dem Anhängen einer solchen hinter die letzte Stelle des Dividends entsprechend ist (§. 102). Wenn man z. B. bei gewöhnlicher Division an den Dividend oder gebliebenen Rest eine Null anhinge (oder darin noch eine Decimalstelle aufnähme, wie bei einem periodischen Decimalbruche), so tritt anstatt dessen das Weglassen der letzten Stelle des Divisors ein.

```
                              |0,6891427  Dsor.
Beispiele. I. Dd. 2,0586374|----------
                  13782854|2,987244 ... Quot.
                  --------
                   6803520
                   6202284
                   -------
                    601236
                    551314
                    ------
                     49922
                     48240
                     -----
                      1682
                      1378
                      ----
                       304
                       276
                       ---
                        28
                        27
                        --
                   Rest  1

                           |82,0059473  Dsor.
    II.   Dd.  258,4663446|----------
               2460178419|  3,1518    Quot.
               ----------
                124485027
                 82005947
                 --------
                 42479080
                 41002974
                 --------
                  1476106
                   820059
                   ------
                   656047
                   656047
                   ------
             Rest      0
```

```
III.  Do. 0,005861479 | 346,4128. Dfor.
          3464128     | 0,00001692050 ... Quot.
          -------
          2397351
          2078477
          -------
           318874
           311771
           ------
             7103
             6928
             ----
              175
              173
              ---
          Rest  2

IV.   Do. 346,0940 | 0,00568472. Dfor.
          3410832  | 60881,4 ... Quot.
          -------
            50108
            45478
            -----
             4630
             4547
             ----
               83
               57
               --
               26
               22
               --
          Rest  4
```

Siebentes Capitel.

Von der Auflösung einfacher Gleichungen mit einer und mit mehreren unbekannten Größen.

§. 145.

Die im Vorhergehenden abgeleiteten Regeln für die Grundoperationen mit ganzen und gebrochenen Zahlen gestatten bereits eine Anwendung auf den Endzweck der Arithmetik: aus den Beziehungen bekannter Größen gegen unbekannte die letztern zu bestimmen. Auf dieser Anwendung beruht die

Auflösung einfacher Gleichungen, wie sich sogleich näher zeigen wird.

§. 146.

Die Gleichheit zweier Zahlen-Ausdrücke oder zweier Zahlen-Verknüpfungen heißt eine Gleichung. Das Gleichheitszeichen (=) trennt die beiden Seiten der Gleichung, oder die beiden Größen, welche als gleich gegeben sind.

Erscheinen die Seiten einer Gleichung als aus Theilen bestehende Größen, die also durch die Zeichen + oder — darin unter einander verbunden sind, so heißt jeder solcher Theil ein Glied der Gleichung. Gleichungen, in denen die darin vorkommenden Zahlenverknüpfungen nur die vier Grundoperationen der Arithmetik ausmachen, sind einfache Gleichungen.

§. 147.

Die Gleichungen, welche den Gegenstand der folgenden Untersuchungen betreffen, enthalten unbekannte Größen, die mit bekannten verknüpft darin vorkommen.

Zur Aufstellung der arithmetischen Beziehungen der Größen durch eine Gleichung, müssen daher auch für die unbekannten Größen Zahlzeichen eingeführt werden, und dazu können nur unbestimmte, also Buchstaben, dienen. Um aber in größter Allgemeinheit eine Verknüpfung bekannter und unbekannter Größen darzustellen, pflegt man auch die als bekannt anzunehmenden Größen durch Buchstaben auszudrücken. Dabei ist es eingeführt, für die bekannnten Größen die ersten Buchstaben, für die unbekannten die letzten Buchstaben des Alphabets zu nehmen.

§. 148.

Wenn in einer Gleichung die unbekannte Größe auf einer Seite allein steht und bloß bekannten (oder doch augen-

blicklich als bekannt angenommenen) unter einander verknüpften Größen gleich gesetzt ist, so heißt sie aufgelöst.

Auflösung einer Gleichung, ist also nichts anders, als die Umformung derselben dahin, daß die unbekannte Größe derselben durch eine Verknüpfung bekannter Größen ausgedrückt erscheint. Läßt sich diese Verknüpfung nun wirklich vornehmen, wie es bei bestimmten Zahlen (wenigstens in einfachen Gleichungen) jederzeit geschehen kann, so erhält man dadurch einen bestimmten Werth der unbekannten Größe. Sind aber auch die bekannten Größen durch unbestimmte Zeichen angedeutet, so läßt sich der Werth jener nicht näher angeben, und es ist durch die Auflösung der Gleichung nur gesagt, wie man mit gewissen Größen rechnen müsse, um eine andere zu erhalten.

Leitet man, z. B. aus der Gleichung $ax + b = c$, die Gleichung $x = \frac{c - b}{a}$ her, so ist die erstere in Beziehung auf x aufgelöst, dessen Werth sich hier aber nicht näher darstellen läßt, sondern nur die Andeutung gewisser Operationen enthält.

Folgert man aber aus der Gleichung $4x + 3 = 15$ die aufgelösete $x = \frac{15 - 3}{4}$, so kann der Werth von x durch die Ausführung der darin angedeuteten Operationen bestimmt angegeben werden, er ist: $\frac{15 - 3}{4} = \frac{12}{4} = 3$.

Anmerk. Setzt man das Resultat jeder der vier Grundoperationen der Arithmetik dem Werthe einer unbekannten Größe gleich, so erhält man eben so viele aufgelöste Gleichungen. Also auch bloße Anwendung der Vorschriften jener Rechnungsarten entspricht dem Endzwecke der Arithmetik. Gewöhnlich fordert aber die Bestimmung unbekannter Größen zuvor die Herleitung und Auflösung von Gleichungen, in denen ihr

Zusammenhang mit bekannten Größen dargestellt wird. Wie man aus gewissen Aufgaben solche Gleichungen ableitet, soll in einem besondern Abschnitte gezeigt werden; hier wird von der Auflösung gegebener einfacher Gleichungen gehandelt.

§. 149.

Gleichungen, in welchen nur eine unbekannte Größe mit bekannten verknüpft vorkommt, heißen bestimmte Gleichungen; die, welche mehrere unbekannte Größen enthalten, unbestimmte Gleichungen, weil sie für sich in Absicht jeder unbekannten Größe unbestimmbar sind.

Auflösung bestimmter einfacher Gleichungen.

§. 150.

Die Auflösung der Gleichungen beruht, der Erklärung des §. 148 zufolge, lediglich darauf, die unbekannte Größe aus ihren Verbindungen mit bekannten Größen zu trennen. Da nun die Verknüpfungen, worin die unbekannte Größe mit bekannten in einfachen Gleichungen steht, nur die vier Species der Rechenkunst ausmachen, so wird ihre Auflösung durch den Satz vermittelt,

daß jede dieser Operationen durch die ihr entgegengesetzte aufgehoben werden kann: die Addition durch Subtraction, und umgekehrt die Subtraction durch Addition; die Multiplication durch Division und die Division durch Multiplication.

Hierdurch und durch die Anwendung des Grundsatzes:

gleiche Operationen mit gleichen Größen vorgenommen, müssen wiederum gleiche hervorbringen,

wird es möglich, alle Verbindungen der unbekannten mit bekannten Größen, welche in einer einfachen Gleichung vorkommen dürfen, nach und nach ohne Störung der Gleichheit aufzuheben.

Diese

Diese beiden Sätze sind es daher, welche dem bei der Auflösung einfacher Gleichungen zu beobachtenden Verfahren, im Allgemeinen als Beweis zum Grunde liegen.

§. 151.

Die verschiedenen einfachen Fälle, worin sie unmittelbar zur Auflösung der Gleichung führen, und worauf alle zusammengesetztere zurückkommen, sind folgende:

1) Es sey $x + a = b$,
so wird durch Subtraction der Größe a auf beiden Seiten der Gleichung:

$$x = b - a \quad \text{(Vergl. §. 37).}$$

2) Es sey $x - a = b$,
so wird durch Addition der Größe a auf beiden Seiten der Gleichung:

$$x = b + a \quad \text{(Vergl. §. 37).}$$

3) Es sey $ax = b$,
so wird durch Division beider Seiten der Gleichung durch die Größe a:

$$x = \frac{b}{a} \quad \text{(Vergl. §. 63).}$$

4) Es sey $\frac{x}{a} = b$,
so wird durch Multiplication beider Seiten der Gleichung mit der Größe a,

$$x = ba \quad \text{(Vergl. §. 62).}$$

Das Zeichen x bedeutet hier, so wie immer in der Folge, wenn nichts anders ausdrücklich bemerkt wird, die unbekannte Größe.

§. 152.

Aus den in den vorstehenden Formeln enthaltenen Sätzen, läßt sich, zunächst für die Umformungen von Gleichungen überhaupt, Folgendes herleiten. Vermöge der ersten beiden

wird es möglich, jedes beliebige Glied der Gleichung von einer Seite derselben wegzuschaffen: man addirt es auf beiden Seiten, wenn es mit dem Zeichen minus; man subtrahirt es auf beiden Seiten, wenn es mit dem Zeichen plus behaftet ist. Das Wegschaffen eines Gliedes von einer Seite und Hinüberbringen auf die andere Seite der Gleichung wird Transposition desselben genannt, und aus dem Gesagten ergiebt sich dafür die mechanische Regel: man lasse das zu transponirende Glied auf der einen Seite der Gleichung weg, und setze es auf die andere mit entgegengesetztem Zeichen.

§. 153.

Aus Nr. 3 und Nr. 4 des §. 151 ergiebt sich das Mittel, ein Glied der Gleichung von einem Factor oder von einem Divisor zu befreien. Im ersten Falle — dividirt man beide Seiten der Gleichung durch diesen Factor; im andern — multiplicirt man beide Seiten der Gleichung durch den wegzuschaffenden Divisor.

Da die ganze Gleichung allemal multiplicirt oder dividirt werden muß, um die Gleichheit nicht zu stören, so ist klar, daß diese Operationen mit allen Gliedern derselben vorgenommen werden müssen. Steht daher ein wegzuschaffender Factor oder Divisor als solcher nicht auf einer Seite der Gleichung in allen Gliedern, so muß man auch auf dieser Seite alle Glieder durch ihn dividiren oder multipliciren, in denen er nicht vorkommt.

Wäre z. B. in der Gleichung

$$ax + bc - q - na = p,$$

der Factor a vom ersten Gliede zu trennen, so wird aus ihr:

$$x + \frac{bc}{a} - \frac{q}{a} - n = \frac{p}{a}.$$

§. 154.

Folgende beiden Fälle, worin die Auflösung einfacher Gleichungen zwar schon durch eine wiederholte Anwendung der Vorschriften des §. 151 geschehen könnte, mögen noch als eigenthümliche aufgeführt werden, da sie dann Abkürzung gewähren. Nämlich:

1) wenn $a - x = b$,
so ist $x = a - b$;

denn der Minuend weniger der Differenz ist gleich dem Subtrahend, weil die Summe dieser beiden gleich dem erstern ist. (§. 36).

2) wenn $\frac{a}{x} = b$,

so ist $x = \frac{a}{b}$;

denn, da das Product aus Divisor in den Quotienten gleich dem Dividend ist, so ist dieser, dividirt durch den Quotienten, gleich dem Divisor. (Vergl. §. 63).

§. 155.

Bei der Auflösung irgend gegebener einfacher Gleichungen, mögen zuerst zwei Fälle unterschieden werden, nämlich der, worin die unbekannte Größe nur einmal in der Gleichung vorkommt, und der, worin sie in der Gleichung in mehreren Gliedern enthalten ist.

§. 156.

Steht die unbekannte Größe in der Gleichung nur einmal, und ist sie nur durch eine einzige arithmetische Operation mit einer bekannten Größe verbunden, so zeigen die §§ 151 und 154 ihre Auflösung. Ist die unbekannte Größe in diesem Falle aber durch mehrere Operationen mit bekannten Größen verknüpft, so wird sie davon durch mehrmalige Anwendung derselben Regeln befreiet, indem man in um-

gekehrter Ordnung, in welcher die bekannnten Größen mit der unbekannten verbunden wurden, jene davon trennt.

Beispiele. I. Es sey die Gleichung

$$\frac{bx - a}{c} + d = p$$

gegeben, so wird aus ihr:

1) durch Transposition von d,

$$\frac{bx - a}{c} = p - d;$$

2) durch Multiplication mit c,

$$bx - a = pc - dc;$$

3) durch Transposition von a,

$bx = pc - dc + a$; endlich

4) durch Division mit b,

$$x = \frac{pc - dc + a}{b}.$$

II. Es sey die Gleichung

$\frac{a}{x - c} + b = p$ gegeben, so wird daraus:

1) durch Transposition von b,

$$\frac{a}{x - c} = p - b;$$

2) durch Anwendung der Regel Nr. 2 des §. 154,

$x - c = \frac{a}{p - b}$; endlich

3) durch Transposition von c,

$x = \frac{a}{p - b} + c$, oder durch Vereinigung auf der rechten Seite,

$$x = \frac{a + (p - b)c}{p - b} = \frac{a + pc - bc}{p - b}$$

§. 157.

Es ist kaum nöthig, zu bemerken, daß man bei gehöriger Uebung die einzelnen Schritte der Auflösung in Gedanken vornehmen, und gleich den Werth der unbekannten Größe aus

einer solchen Gleichung, wie die bisher betrachteten, hinschreiben wird. Dieser Werth muß alsdann immer in der bequemsten Gestalt, d. h. gehörig reducirt und vereinigt, angegeben werden.

Sind die bekannten Größen in Zahlen gegeben, so führt man die bei Buchstaben bloß angedeuteten Operationen allemal wirklich aus.

Beispiel. Aus der Gleichung

$$\frac{5x - 3}{8} - 6 = 12, \text{ wird zunächst:}$$

$$\frac{5x - 3}{8} = 18; \text{ daraus}$$

$$5x - 3 = 144, \text{ und hieraus}$$

$$x = \frac{147}{5} = 29\tfrac{2}{5}.$$

§. 158.

Wenn in einer Gleichung die unbekannte Größe mehrere Male vorkommt, so muß man sie so umformen, daß die unbekannte Größe, wo sie steht, nur als Factor steht; daß alle Glieder, die sie enthalten, auf eine Seite der Gleichung geschafft sind, und sie hier daher als gemeinschaftlicher Factor erscheint, — wodurch auf der andern Seite der Gleichung nur ganz bekannte Glieder vorkommen. In Zeichen kann man diese hervorzubringende Form einer Gleichung durch

$$ax = p$$

ausdrücken, worin a und p bekannte, übrigens willkürliche Größen, nämlich ganze Zahlen oder Brüche, positive oder negative, einfache oder aus Theilen zusammengesetzte, Größen bedeuten.

Durch die Anwendung folgender Regeln kann jede einfache Gleichung auf diese Form gebracht werden, weshalb man sie auch als das allgemeine Schema einer solchen Gleichung ansehen darf.

1) Man schaffe durch Multiplication alle in der Gleichung vorkommende Divisoren fort.

2) Man entwickele durch Multiplication die Partialproducte etwaiger mehrtheiliger Factoren in solchen Gliedern, worin die unbekannte Größe vorkommt.

3) Alle Glieder, welche nun die unbekannte Größe als Factor enthalten, bringe man durch Transposition auf die eine Seite, und alle Glieder, welche ganz bekannt sind, auf die andere Seite der Gleichung.

4) Auf jener Seite, wo nur diejenigen Glieder stehen, welche die unbekannte Größe als Factor enthalten, sondere man diese als gemeinschaftlichen Factor ab, — wodurch dann die obige Form erreicht ist.

Anmerk. Die Größen a und p müssen durch die Ausführung der ersten Regel nun nothwendig ganze Zahlen werden. Es ist aber nicht erforderlich, sie immer so zu betrachten, indem man $ax = p$ als allgemeine, und zu ihrer Auflösung nöthige, Form jeder einfachen Gleichung annimmt; sondern es gilt die im Anfange dieses §. darüber ausgesprochene Bestimmung. (Man sehe §. 164. Nr. 1).

§. 159.

Aus der Gleichung

$ax = p$, wird

$x = \frac{p}{a}$ (§. 151 Nr. 3).

Fügt man daher den Regeln des vorhergehenden §. als fünfte hinzu:

man dividire beide Seiten der Gleichung durch die bekannte Größe, welche auf der einen Seite als Factor mit der unbekannten Größe verbunden steht,

so ist in diesen fünf Regeln die Auflösung jeder beliebigen einfachen Gleichung enthalten.

Beispiele. I. Es sey die Gleichung

$$a + \frac{cx}{x - b} + d = m$$

gegeben; so wird aus ihr durch Anwendung der ersten Regel,

$$a(x - b) + cx + d(x - b) = m(x - b);$$

durch Anwendung der zweiten Regel,

$$ax - ab + cx + dx - db = mx - mb;$$

durch Anwendung der dritten Regel,

$$ax + cx + dx - mx = ab + db - mb;$$

durch Anwendung der vierten Regel,

$$(a + c + d - m)x = ab + db - mb,$$

und endlich durch Anwendung der fünften Regel:

$$x = \frac{ab + db - mb}{a + c + d - m}.$$

II. Es sey die Gleichung

$$\frac{3x}{4} + \frac{5 - x}{3} = 12 - x$$

gegeben, so wird daraus durch Anwendung der ersten Regel

$$9x + 20 - 4x = 144 - 12x;$$

da hier die zweite Regel nicht nöthig wird, so erhält man sogleich nach der dritten Regel:

$$9x - 4x + 12x = 144 - 20;$$

nach der vierten Regel und durch gleichzeitige Vereinigung:

$$17x = 124;$$

durch Anwendung der fünften Regel,

$$x = \frac{124}{17} = 7\tfrac{5}{17}.$$

§. 160.

Soll eine Gleichung durch Anwendung der gegebenen Regeln aufgelöst werden können, so ist es nothwendig, daß, nachdem die ersten beiden ausgeführt sind, die unbekannte Größe in den Gliedern, die sie enthalten, nur **einmal** als Factor steht; denn sonst kann die Form $ax = p$ nicht er-

reicht werden. Kommt aber die unbekannte Größe in einem oder mehreren Gliedern mehrere Male als Factor vor, so ist die Gleichung keine einfache. Z. B. die Gleichung

$$\frac{ax}{x + b} + c = dx$$

ist keine einfache, denn aus ihr wird durch Multiplication mit $(x + b)$

$$ax + cx + cb = dxx + dbx.$$

Eine Ausnahme dieser Bestimmung tritt ein, wenn in dem erwähnten Falle sich die ganze Gleichung ein oder mehrere Male durch die unbekannte Größe dividiren läßt, und diese dadurch in den Gliedern, welche sie enthalten, nur einmal als Factor übrig bleibt. So ist z. B. die Gleichung

$$axx + bx = cx$$

eine einfache; denn durch Division mit x wird daraus

$$ax + b = c.$$

§. 161.

Kommt die unbekannte Größe, nach Anwendung der ersten beiden Regeln des §. 158, in allen Gliedern einer Gleichung einmal als Factor vor, so fällt sie durch Division der Gleichung mit ihr ganz daraus weg. Eine solche Gleichung kann daher nicht dazu dienen, die in Frage stehende unbekannte Größe zu bestimmen.

In der Gleichung

$$ax = bx$$

muß nothwendig $a = b$ seyn, wenn man sich unter x ein und dieselbe Größe denken soll, und man kann unter dieser Annahme jeden beliebigen Werth für x setzen, und wird auf beiden Seiten Gleiches erhalten.

Durch Auflösung dieser Gleichung, wenn man ihr vorher die Gestalt $(a - b)\,x = 0$ giebt, erhält man

$$x = \frac{0}{a - b} \text{ und da hier wegen}$$

$a = b$, auch $a - b = o$ ist,

$x = \frac{o}{o}$, welches der Ausdruck eines völlig unbestimmten Werths ist.

§. 162.

Ist die aufzulösende Gleichung von der Beschaffenheit, daß die unbekannte Größe nach der Auflösung negativ erscheint, so macht man sie dadurch positiv, daß man die ganze Gleichung mit (— 1) multiplicirt; dies geschieht, indem man das jedem Gliede vorstehende Zeichen ins entgegengesetzte verwandelt.

Wenn $- x = a - b + c$ ist, so wird

$$x = b - a - c.$$

§. 163.

Die in den §§. 158 und 159 aufgestellten Regeln führen zur Auflösung jeder einfachen Gleichung, auch solcher, worin die unbekannte Größe nur einmal vorkommt; aber in diesem Falle wird die Auflösung, wenn man nach ihnen verfährt, weitläufiger, als bei dem im §. 156 angegebenen Verfahren, es sey denn, daß man die Reduction des für die unbekannte Größe gefundenen Werths berücksichtigt, welche durch die Auflösung nach jenen Regeln (nach denen der §§. 158. 159) sogleich mit bezweckt wird. — Es ist übrigens für die Anwendung derselben auf die Auflösung gegebener Gleichungen, besonders zur Erleichterung des wirklichen Rechnens (der Ausführung der angedeuteten Operationen) noch Folgendes zu bemerken.

§. 164.

1) Das Wegschaffen der Divisoren einer Gleichung ist eigentlich nur dann zur Auflösung derselben durchaus erforderlich, wenn in ihnen die unbekannte Größe enthalten ist, oder doch die Zähler der Glieder, worin sie stehen, zusam-

mengesetzt sind, und darin die unbekannte Größe verwickelt ist. Bekannte Divisoren ganz bekannter Glieder können immerhin beibehalten werden, indem man auf solche Größen die Regeln der Bruch-Rechnung anwendet. Bequem ist dies aber, wegen der gehörigen Reduction des Werths der unbekannten Größe, welche man jedesmal verlangt, nur in gewissen Fällen, worin die Gleichung nicht zu sehr zusammengesetzte Größen enthält. Z. B. Aus der Gleichung: $\frac{b}{a}x = p$, folgt durch Division mit $\frac{b}{a}$ sogleich, $x = \frac{pa}{b}$.

2) Zur Wegschaffung der Divisoren ist zwar im Allgemeinen die Multiplication der Gleichung mit allen diesen, oder mit dem Producte derselben nöthig; die besondere Beschaffenheit der Divisoren kann es aber mit sich bringen, daß sie durch Multiplication der Gleichung mit einer kleinern Zahl, als jenem Producte, wegfallen. Man darf nämlich dazu das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Divisoren nehmen, indem sie hierin sämmtlich aufgehen, mithin verschwinden werden, wenn dasselbe den sie enthaltenden Gliedern als Factor beigefügt wird.

3) Die gehörige Vereinigung und Reduction der einzelnen Glieder, welche nach Ausführung der beiden ersten Regeln des §. 158 die Gleichung ausmachen, darf in den speciellen Fällen, worin sie möglich ist, nicht unterlassen werden, um der Gleichung, und demnächst dem Werthe der unbekannten Größe, die einfachste Gestalt zu geben.

4) Es versteht sich von selbst, daß die fünf Regeln zur Auflösung der Gleichungen nicht immer einzeln, sondern, namentlich im Fall wenige zusammengesetzte Größen in der Gleichung vorkommen, in Verbindung mit einander ausgeführt werden. Die vierte Regel kann man nur in Gedanken an-

wenden, d. h. es ist nicht nöthig, die Gleichung in der durch sie veränderten Gestalt ausdrücklich hinzuschreiben.

Aufstellung verschiedener Fälle in Beispielen, worin die vorstehenden Bemerkungen ihre Anwendung finden.

§. 165.

Um die Richtigkeit der Auflösung einer Gleichung zu prüfen, kann man den Werth, den man für die unbekannte Größe gefunden hat, in der Gleichung an die Stelle derselben setzen; ist er der richtige, so muß nach dieser Substitution den Bedingungen der Gleichung ein Genüge geleistet werden, d. h. auf beiden Seiten derselben wirklich Gleiches erscheinen.

Einfache Gleichungen mit mehr als einer unbekannten Größe.

§. 166.

Enthält eine Gleichung mehr als eine unbekannte Größe, so läßt sich daraus zwar für jede derselben der Werth finden; dieser Werth bleibt aber unbestimmt, weil er aus einer Verknüpfung bekannter mit einer oder mehreren unbekannten Größen besteht. *)

Wenn in diesem Falle aber eben so viele, von einander unabhängige Gleichungen, d. h. solche, die nicht eine aus der andern durch Rechnungsoperationen hergeleitet sind, gegeben werden, als verschiedene unbekannte Größen in ihnen überhaupt vorkommen, so lassen sich durch gewisse Verbindungen dieser Gleichungen mit einander nach und nach alle unbekannte Größen bestimmen.

§. 167.

Die allgemeine Form, unter welche die einfachen Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen gebracht werden

*) Ueber die Auflösung unbestimmter einfacher Gleichungen sehe man das 2te Capitel des 4ten Abschnitts.

können, ist, wenn man diese mit x, y, z u. s. w. bezeichnet, für eine Gleichung mit zwei unbekannten Größen:

$$ax + by = c;$$

für eine Gleichung mit drei unbekannten Größen:

$$ax + by + cz = d$$

u. s. w.

worin a, b, c, d bekannte oder den Inbegriff mehrerer bekannter Größen bedeuten.

Diese Gestalt kann jeder beliebigen Gleichung, wenn sie wirklich eine einfache ist, durch folgende Operationen gegeben werden:

1) Man schafft die Divisoren der Gleichung fort, und entwickelt die angedeutete Multiplication etwaiger mehrtheiliger Factoren. Dabei ist dasselbe zu beobachten, was bei der Anwendung der ersten beiden Regeln des §. 158 überhaupt im Vorhergehenden bemerkt worden ist.

2) Man bringt durch Transposition diejenigen Glieder, welche nun unbekannte Größen als Factoren enthalten, auf die eine, und die bekannten Glieder auf die andere Seite der Gleichung, und stellt

3) auf jener Seite die Glieder so zusammen, daß diejenigen, welche einerlei unbekannte Größen enthalten, auf einander folgen, und diese darin als gemeinschaftlicher Factor abgesondert erscheint.

Die Operationen in Nr. 1 nennt man das Entwickeln, die nach Nr. 2 und Nr. 3 das Ordnen einer Gleichung.

Beispiel. Aus der Gleichung:

$$\frac{a + x}{b} - c + y = \frac{nx - my}{p} + d$$

wird durch Fortschaffen der Divisoren b und p:

$$(a + x)p - cbp + bpy = (nx - my)b + dbp;$$

durch Entwickelung der in den ersten Gliedern beider Seiten noch angedeuteten Multiplicationen:

$$ap + px - cbp + bpy = nbx - mby + dbp:$$

durch Ordnen:

$$(p - nb)x + (bp + mb)y = dbp + cbp - ap$$

Hierin ist also:

das a der allgem. Formel, $p - nb$

das b „ „ „ , $bp + mb$ und

das c „ „ „ , $dbp + cbp - ap$.

§. 168.

Es ergiebt sich hieraus zunächst, daß, wenn die erwähnte Form bei einer Gleichung erreicht werden soll, nach Entwickelung derselben in keinem Gliede mehr, als ein unbekannter Factor entstehen darf. Hat eine Gleichung diese Beschaffenheit nicht, so ist sie keine einfache Gleichung. Z. B. die Gleichung

$$axy + by = c$$

gehört nicht zu den einfachen Gleichungen mit zwei unbekannten Größen.

§. 169.

Wenn eben so viele von einander unabhängige Gleichungen gegeben sind, als in denselben verschiedene unbekannte Größen vorkommen, so läßt sich daraus eine Gleichung herleiten, worin nur eine und zwar eine beliebige der unbekannten Größen vorkommt.

Der Beweis dieses Satzes wird zugleich die Behauptung des §. 166, daß eben diese Gleichungen zur Bestimmung aller unbekannten Größen dienen können, und dazu hinreichend sind, rechtfertigen. Denn, da man für eine beliebige unbekannte Größe eine Gleichung, die nur sie enthält, soll ableiten können, so kommt es nur darauf an, diese Operation nach und nach für jede anzustellen. — Die Auflösung der erhaltenen Gleichungen bestimmt aber allemal die darin vorkommende unbekannte Größe.

§. 170.

Die aus gegebenen abzuleitende Gleichung, welche zur Bestimmung der einen in ihr noch enthaltenen, unbekannten Größe dient, heißt die Endgleichung oder Bestimmungsgleichung (der in ihr vorkommenden unbekannten Größe). Um sie abzuleiten, kommt es darauf an, die gegebenen Gleichungen so zu verbinden, daß eine unbekannte Größe daraus weggeschafft wird, und dieses mit den dadurch entstehenden neuen Gleichungen zu wiederholen, bis zuletzt aus der Verbindung von zweien, eine Gleichung entsteht, worin nur die verlangte unbekannte Größe vorkommt. — Das Wegschaffen einer unbekannten Größe aus Gleichungen wird Elimination dieser unbekannten Größe genannt. Die Gleichungen müssen dabei, wie §. 167 gezeigt ist, vorher entwickelt und geordnet werden. Für die Elimination selbst giebt es aber drei verschiedene Methoden, welche im folgenden §. an zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Größen dargestellt werden sollen.

§. 171.

Es mögen dazu die Gleichungen

I. $ax + by = c$ und

II. $mx + ny = p$

gegeben seyn, und es mag verlangt werden, daraus eine dritte abzuleiten, worin nur eine unbekannte Größe, z. B. y, vorkommt, also die andere x zu eliminiren.

Die erste Methode.

1) Man suche aus jeder der gegebenen Gleichungen den Werth der zu eliminirenden unbekannten Größe, hier also den Werth von x, indem man sie in Beziehung auf eben diese Größe auflöst, die andere unbekannte Größe dabei augenblicklich als bekannt annehmend; so findet sich

aus I, $x = \frac{c - by}{a}$;

aus II, $x = \frac{p - ny}{m}$.

2) Beide Werthe setze man unter einander gleich, so entsteht die verlangte Gleichung, worin nur y vorkommt, nämlich

$$\frac{c - by}{a} = \frac{p - ny}{m}.$$

Die zweite Methode.

1) Man suche aus einer der gegebenen Gleichungen den Werth der zu eliminirenden Größe, durch Auflösung derselben in Betreff dieser unbekannten Größe; für x findet sich z. B. aus I,

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

2) Diesen Werth setze man in die andere Gleichung für die entsprechende unbekannte Größe, so verschwindet diese daraus, und es entsteht eine neue Gleichung, worin ebenfalls nur die andere unbekannte Größe enthalten ist. Hier substituire man also für x den Werth $\frac{c - by}{a}$ in die Gleichung II, so erhält man

$$m \cdot \frac{c - by}{a} + ny = p,$$

worin nur y vorkommt.

Die dritte Methode.

1) Man multiplicire die eine Gleichung durch den Coefficienten der zu eliminirenden unbekannten Größe der andern Gleichung, und diese durch den Coefficienten jener unbekannten Größe in der ersten Gleichung; dadurch werden in beiden die Glieder, welche die wegzuschaffende Größe enthalten, gleich groß.

2) Nun addire man beide Gleichungen, wenn diese Glieder ungleiche Zeichen haben, subtrahire die eine von der andern, wenn sie gleiche Zeichen haben, so heben sich diese Glieder gegenseitig auf, und es entsteht eine neue Gleichung, worin nur eine unbekannte Größe vorkommt.

Im vorliegenden Falle wird demnach aus der Gleichung I durch Multiplication mit m, die:

$$max + mby = mc;$$

aus der Gleichung II durch Multiplication mit a,

$$amx + any = ap.$$

Die dadurch entstandene letzte Gleichung von der erstern subtrahirt, giebt die neue:

$$mby - any = mc - ap,$$

welche abermals die verlangte ist, worin nur y vorkommt.

Durch die Anwendung der ersten Regel der dritten Methode soll die Gleichheit der Glieder, welche die wegzuschaffende unbekannte Größe enthalten, in beiden Gleichungen bezweckt werden. Im Allgemeinen wird dies durch jene Regel immer erreicht; in besondern Fällen aber kann es noch auf mehr, als eine Art, bewirkt werden. Zuweilen durch Division der einen oder beider Gleichungen durch eine gewisse Zahl, wodurch zugleich kleinere Zahlen in den Gleichungen entstehen; zuweilen ist auch nur die eine Gleichung mit einer Zahl zu multipliciren. Auch kann der Fall eintreten, daß diese Glieder in den anfangs gegebenen Gleichungen schon gleich sind; in welchem Falle man natürlich sogleich zur zweiten Regel dieser Methode schreitet.

Fälle, in welchen man der einen oder der andern der drei Eliminations-Methoden den Vorzug giebt. — Wahl der zuerst zu eliminirenden Größe, wenn sie willkürlich ist und alle unbekannte Größen bestimmt werden sollen.

§. 172.

Hat man durch eine dieser Methoden eine Gleichung erhalten,

halten, worin nur eine unbekannte Größe befindlich ist, so löst man sie auf, und erhält dadurch den Werth ihrer unbekannten Größe durch bloß bekannte Größen ausgedrückt. So giebt in dem angenommenen Beispiele die durch die dritte Methode aus den gegebenen Gleichungen abgeleitete:

$$mby - any = mc - ap,$$

den Werth

$$y = \frac{mc - ap}{mb - an}.$$

Um nun auch die andere unbekannte Größe zu bestimmen, könnte man wie bei der Bestimmung der ersteren verfahren; also diese aus den gegebenen Gleichungen eliminiren, und die dadurch erhaltene Endgleichung in Betreff der, in ihr nun noch allein vorkommenden, unbekannten Größe auflösen. Es wird aber gewöhnlich kürzer seyn, den für die eine unbekannte Größe bereits gefundenen Werth für sie in eine der gegebenen Gleichungen zu substituiren, wodurch sogleich ihre Elimination bewirkt ist.

Den Werth

$$y = \frac{mc - ap}{mb - an}$$ in die Gleichung

$ax + by = c$ für y substituirt, giebt

$$ax + b \cdot \frac{mc - ap}{mb - an} = c,$$ und daraus findet sich

$$x = \frac{bp - nc}{mb - an}.$$

Zu einer solchen Substitution kann man auch eine aus den anfänglich gegebenen schon abgeleitete Gleichung nehmen, und man wird immer die einfachste derselben dazu wählen.

§. 173.

In den beiden letzten §§. ist mit der Darstellung der verschiedenen Eliminations-Methoden zugleich der Beweis des §. 169 ausgesprochenen allgemeinen Satzes, für z w e i Gleichungen mit zwei unbekannten Größen geführt.

Es können nun aber mehr als zwei unbekannte Größen, beliebig viele, in den Gleichungen vorkommen, deren Zahl gleich der Anzahl der unbekannten Größen ist; dann wird die Ableitung einer Gleichung, worin nur noch eine unbekannte Größe vorkommt, folgendermaaßen bewerkstelligt. Zuerst eliminirt man aus allen Gleichungen d i e s e l b e unbekannte Größe. Zu diesem Zwecke ist die Verbindung von jedesmal zwei Gleichungen, wovon wenigstens die eine jene unbekannte Größe enthält, durch eine, der im §. 171 gezeigten Methoden erforderlich. Es ist klar, daß man hierdurch zugleich mit einer unbekannten Größe, auch eine Gleichung weniger erhält; denn je zwei zu diesem Zwecke verbunden, geben e i n e neue Gleichung. Dadurch ist aber die Aufgabe auf eine andere, die schon einfacher ist, zurückgeführt: man hat eine unbekannte Größe weniger als anfangs, und noch so viele Gleichungen, als nun unbekannte Größen vorhanden sind. Die abermalige Anwendung dieses Verfahrens wird wiederum die Anzahl der Gleichungen und die der unbekannten Größen um eins verringern; durch Fortsetzung desselben [illegible] man folglich dahin gelangen, daß man e i n e Gleichung [illegible]n e r unbekannten Größe erhält. So ist also das, §. 169 aufgestellte, allgemeine Theorem, für jede beliebige Anzahl von unbekannten Größen bewiesen.

§. 174.

Es ist leicht einzusehen, daß bei dem angezeigten Verfahren im Allgemeinen nichts abgeändert wird, wenn nicht

in allen Gleichungen die sämmtlichen unbekannten Größen vorkommen. Enthalten z. B. zwei Gleichungen eine gewisse unbekannte Größe, die nicht in den andern befindlich ist, so wird durch Elimination dieser aus ihnen, eine Gleichung entstehen, welche mit den übrigen die Zahl ergänzt, die mit der Menge der noch vorkommenden unbekannten Größen übereinstimmt.

Der leichteste Fall tritt ein, wenn in einer der gegebenen Gleichungen nur eine unbekannte Größe vorkommt; sie wird aufgelöst, und der Werth ihrer unbekannten Größe in die übrigen Gleichungen substituirt, welche sie enthalten, wodurch sogleich die Elimination derselben aus allen Gleichungen geschehen ist.

Wären mehr Gleichungen, als unbekannte Größen vorkommen, anfänglich gegeben, so können, so viele diese Zahl übersteigen, als überflüssige Bedingungsgleichungen angesehen werden. Zur Ableitung der Endgleichung sind sie, wie der vorhergehende §. ergiebt, nicht nöthig.

Bei der Auflösung einer Aufgabe mittelst Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen, muß jedoch wegen solcher überflüssigen Gleichungen, deren Aufstellung die Natur der Aufgabe gestatten möchte, vorausgesetzt werden, daß sie keine Beziehungen für die unbekannten Größen mit sich bringen, welche mit denen im Widerspruche stehen, die die andern Gleichungen ausdrücken. Geschähe dies, so wäre es ein sicheres Zeichen, daß die Aufgabe selbst für die Bestimmung der darin in Frage stehenden Größen entweder unzulänglich wäre, oder etwas Ungereimtes enthielte.

§. 175.

Je mehr unbekannte Größen vorkommen, desto weitläufiger wird die Auflösung der Aufgabe, aus eben so vielen

gegebenen Gleichungen, eine herzuleiten, welche nur eine dieser unbekannten Größen enthält. Ist aber erst der Werth einer unbekannten Größe bestimmt ausgedrückt, so tritt für das weitere Verfahren zur Bestimmung der übrigen eine Erleichterung dadurch ein, daß man den Werth der gefundenen in die Gleichungen, in denen sie steht, substituirt; ähnlich wie dieses bei zwei unbekannten Größen §. 172 gezeigt ist.

Vortheilhafteste Eliminations-Methode bei Gleichungen mit mehr als zwei unbekannten Größen in verschiedenen Fällen. — Beispiele darüber.

Zweiter Abschnitt.

Von den Potenzen und damit in Verbindung stehenden Rechnungsarten.

Erstes Capitel.

Erklärung von Potenz einer Zahl, und der darauf begründeten Operationen.

§. 176.

Potenz oder Dignität heißt ein Product aus gleichen Factoren. Wenn also dieselbe Zahl mehrere Male als Factor gesetzt wird, so entsteht eine Potenz derselben, wovon sie selbst Wurzel, (Grundzahl, Basis) und die Zahl, welche angiebt, wie oft sie als Factor gesetzt ward, Exponent oder Grad der Potenz, genannt wird.

§. 177.

Soll von einer Zahl eine Potenz gebildet werden, so sagt man: sie solle auf die Potenz eines gewissen Exponenten erhoben werden — und nennt diese Operation Erhebung zur Potenz oder Potenziirung. Die Andeutung derselben geschieht, indem man den Exponenten zur Rechten oben an die gegebene Wurzel schreibt, und zwar mit einem etwas kleineren Zeichen, als diese. Z. B. 3^4 spricht man aus:

die Zahl 3 zur 4ten Potenz erhoben; und es ist $3^4 = 3 . 3 . 3 . 3 = 81$; d. h. die vierte Potenz von 3 ist 81.

Auf dieselbe Art erklären sich die Ausdrücke: zweite, dritte Potenz einer Zahl u. s. w. Allgemein bedeutet: die nte Potenz einer Zahl bilden, diese n mal als Factor setzen ($a^n = a . a . a . a .....$). Die Potenziirung kommt demnach auf die Ausführung einer oder mehrmaliger Multiplication zurück.

§. 178.

Wenn eine Zahl als Potenz einer unbekannten Wurzel, und zugleich der Exponent dieser Potenz gegeben wird, so findet man die Wurzel durch Zerlegung der gegebenen Zahl in eben so viele gleiche Factoren, als der Exponent Einheiten enthält; die Größe eines solchen Factors ist die der gesuchten Wurzel. Diese Operation heißt Wurzel-Ausziehung aus der gegebenen Zahl; und der dabei gleichfalls gegebene Exponent wird Grad der auszuziehenden Wurzel (schlechthin: Wurzelgrad, Wurzel-Exponent) genannt.

Die Wurzel-Ausziehung ist also das Umgekehrte der Erhebung zur Potenz. Erhebt man daher eine Größe zu einer gewissen Potenz, und zieht aus dem Resultate die Wurzel desselben Grades, so erhält man die erste Größe wiederum selbst.

Die Ausziehung der Wurzel (Radix) wird durch das Zeichen: $\sqrt{}$ angedeutet, welches man vor die Zahl setzt, aus der die Wurzel gezogen werden soll. In die Oeffnung dieses Zeichens schreibt man den Wurzelgrad. Es ist z. B.

$$\sqrt[4]{81} = 3, \text{ denn es war } 3^4 = 81.$$

Allgemein bedeutet also

$$\sqrt[n]{a} \text{ (Radix des nten Grades aus a)},$$

daß die Zahl a in n gleiche Factoren zerlegt, und die Größe eines solchen gesetzt werden soll.

Anmerkung. Zur Realisirung eines Ausdrucks wie $\sqrt[n]{a}$, welcher eine Wurzelgröße genannt wird, ist es erforderlich, daß die Größe a wirklich die nte Potenz einer gewissen andern Größe sey. Ob und in wiefern dies immer angeht, wird die Folge ergeben. Man kann indessen schon im Voraus schließen, daß die Wurzelausziehung, als eine indirecte Operation, mit mehreren Schwierigkeiten verbunden ist, als die Erhebung zur Potenz, welche, als ein bestimmter Fall der Multiplication, jedesmal auszuführen seyn wird.

§. 179.

Auch der Exponent einer Potenz, die nebst ihrer Wurzel gegeben ist, kann als unbekannt angenommen werden, und dieses würde der dritte und letzte Fall seyn, wenn man von den drei Größen: Wurzel, Exponent und Potenz, welche in dem §. 176 erklärten Zusammenhange stehen, zur Zeit eine als unbekannt ansehen will.

Die Operation zur Bestimmung der Exponenten einer gegebenen Wurzel, um gegebene Zahlen als Potenzen derselben hervorzubringen, kommt unter dem Namen: Berechnung von Logarithmen — vor.

§. 180.

Zur Wurzel einer zu bildenden Potenz muß nothwendig eine unbenannte Zahl genommen werden, da sie selbst mehrere Male als Factor gesetzt werden soll (§. 43), daher auch die Potenz immer eine solche ist; der Exponent ist es seiner Erklärung nach ebenfalls. Mithin hat man es in den §. 177 — §. 179 aufgeführten Operationen lediglich mit unbenannten Zahlen zu thun.

§. 181.

So lange man zu Exponenten einer Potenz positive ganze Zahlen annimmt, ist die im Vorhergehenden gegebene

Erklärung von Potenz und die daraus folgende von Potenziirung hinreichend; sollen aber auch negative Zahlen und Brüche, also ganz beliebige Größen, als Exponenten zugelassen werden, so muß der Begriff von Potenz weiter ausgedehnt und allgemeiner gefaßt werden. Dies wird durch folgende Betrachtung vermittelt.

§. 182.

Indem man der Erklärung des §. 176 zufolge, die Wurzel so oft als Factor setzt, als der Exponent anzeigt, setzt man sie eben so oft als Factor, als die Einheit im Exponenten als Theil enthalten ist. Man darf daher auch sagen: die Potenz entstehe durch mehrmaliges Setzen der Wurzel als Factor, während der Exponent durch eben so vielmaliges Setzen der Einheit als Theil, gebildet sey. Und in der That wird dies auf einen allgemeinern Begriff von Potenz leiten, wornach eine beliebige Zahl zum Exponenten angenommen werden darf, wenn man nur darzuthun im Stande ist, daß und wie alle Operationen zur Bildung irgend einer Zahl aus der Einheit, welche sich immer auf eine Behandlung der Einheit als Theil bezogen (§. 15) einem Operiren mit der Wurzel als Factor, analog gemacht werden können. Daß dieses aber wirklich geschehen kann, ergiebt sich sehr leicht.

§. 183.

Sollte ein Setzen gleicher Factoren, dem Setzen gleicher Theile entsprechen, so wird eine Zerlegung in gleiche Theile mit der Zerlegung in gleiche Factoren übereinstimmen, welches durch Wurzelausziehung eines so hohen Grades angedeutet wird, als gleiche Factoren hervorgebracht werden sollen.

Ist ferner bei der Zusammensetzung von Theilen etwas gesetzt, welches sich als Theil entgegengesetzt war, so wird bei der Zusammensetzung von Factoren etwas gesetzt werden

müssen, welches sich als Factor entgegengesetzt ist. — Einer Zahl als **Factor entgegengesetzt**, muß man dasjenige nennen, was ihre Function als Factor, d. h. die Multiplication mit ihr aufhebt. Die Multiplication mit einer Zahl wird aber durch Division mit ihr aufgehoben, und diese kann auch durch Multiplication mit einem Bruche, der die Einheit zum Zähler, die Zahl selbst zum Nenner hat, angedeutet werden (§. 121), so daß also ein solcher Bruch bei dem Setzen von Factoren jener Zahl (seinem Nenner) als Factor entgegengesetzt ist.

§. 184.

Nunmehr kann die Erklärung von Potenz **allgemeiner** so aufgestellt werden:

Potenz einer Zahl heißt das Product, welches aus ihr (der Wurzel) durch Zusammensetzung von Factoren, auf dieselbe Art gebildet ist, wie der Exponent dieser Potenz aus der Einheit, durch Zusammensetzung von Theilen erzeugt war.

Indem man diesen Begriff verfolgt, ist es leicht, die Bedeutung der Potenz für irgend einen Werth des Exponenten abzuleiten, — und so fließen die folgenden höchst wichtigen allgemeinen Sätze.

§. 185.

Ist der Exponent eine ganze positive Zahl, so entstand er aus der Einheit, indem diese selbst so oft als Theil gesetzt ward, als seine Menge andeutet; daher muß bei der Bildung der Potenz auch die Wurzel selbst so oft **als Factor** gesetzt werden, als dieser Exponent anzeigt.

Demnach bedeutet z. B. a^n ein Product, das n Factoren enthält, die sämmtlich a heißen ($a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \ldots\ldots$) wie im §. 177.

§. 186.

Ist der Exponent eine ganze negative Zahl, so entstand er aus der Einheit dadurch, daß man das Entgegengesetzte von ihr, so oft als Theil setzte, als seine Menge angiebt; man muß also bei der Bildung der Potenz dieses Exponenten auch nicht die Wurzel selbst, sondern das, was ihr als Factor entgegengesetzt ist, d. h. einen Bruch, der die Einheit zum Zähler, sie selbst zum Nenner hat, eben so oft als Factor zu setzen. Nun werden Brüche in einander multiplicirt, indem man das Product aller Zähler zum Zähler, das aller Nenner zum Nenner eines neuen Bruchs macht. Da aber hier die Zähler der in einander zu multiplicirenden Brüche sämmtlich gleich 1 sind, so ist auch ihr Product die Einheit; das Product der Nenner ist, weil sie alle gleich unter einander sind, eine eben so hohe Potenz mit positivem Exponenten, als ihre Anzahl, d. h. als die Menge des gegebenen Exponenten anzeigt. So wird z. B.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; denn es soll der Erklärung zufolge, der Bruch $\frac{1}{a}$ n^{mal} als Factor gesetzt werden, mithin ist:

$$a^{-n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots\ldots = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots\ldots} = \frac{1}{a^n}.$$

§. 187.

Ist der Exponent ein positiver Bruch, so entstand er aus der Einheit, indem sie in so viele gleiche Theile zerlegt, als sein Nenner, und ein solcher Theil so oft gesetzt ward, als sein Zähler anzeigt. Bei der Bildung der Potenz dieses Exponenten, muß daher die Wurzel zuerst in so viele gleich. Factoren zerlegt, d. h. die Wurzel desjenigen Grades aus ihr gezogen werden, als der Nenner des Exponenten angiebt;

und diese, die erhaltene oder angedeutete Wurzel, darauf so oft als Factor gesetzt, d. h. zu der so hohen Potenz erhoben werden, als der Zähler des Exponenten anzeigt. Hiernach ist mithin

$$a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

So wie aber bei der Bildung des Exponenten $\frac{p}{q}$ aus der Einheit, die Ordnung der mit ihr vorzunehmenden Operationen umgekehrt werden darf, nämlich, anstatt wie vorhin angegeben, mit ihr zu verfahren, sie zuerst p mal als Theil gesetzt, und diese Menge in q gleiche Theile zerlegt werden kann, um den Bruch $\frac{p}{q}$ hervorzubringen; eben so muß es auch gestattet seyn, die Wurzel a erst zur Potenz p zu erheben, und dann aus dem Resultate a^p die Wurzel des qten Grades zu ziehen. Aus diesem Grunde ist

$$a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}.$$

Hieraus ist zugleich zu ersehen, daß die Potenziirung und Wurzelausziehung, wenn beide an einer Zahl vorgenommen werden sollen, in willkührlicher Ordnung daran geschehen können.

§. 188.

Ist endlich der Exponent ein negativer Bruch, so ergiebt sich aus seiner Entstehung aus der Einheit, daß bei der Bildung der Potenz, zuerst das, was der Wurzel als Factor entgegengesetzt ist, genommen, in so viele gleiche Factoren als die Zahl seines Nenners anzeigt, zerlegt, und ein solcher Factor so oft als Factor gesetzt werden muß, als sein Zähler vorschreibt. Es ist

$$a^{-\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{\frac{1}{a}}\right)^p$$

Auch hierfür läßt sich noch ein anderer gleichgeltender Ausdruck angeben. Da nämlich der Bruch $-\frac{p}{q}$ aus der Ein-Einheit auch dadurch gebildet werden kann, daß man zuerst den Werth $\frac{p}{q}$ aus ihr selbst ableitet, und dann von diesem das ihm als Theil Entgegengesetzte nimmt, so muß man bei der Bildung jener Potenz aus der Wurzel a auch zuerst den Werth $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ nehmen, und davon das ihm als Factor Entgegengesetzte $\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$ setzen dürfen. Mithin ist

$a^{-\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{\frac{1}{a}}\right)^p = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$ (letzteres, wegen der Ableitung des vorhergehenden §.)

§. 189.

Folgerungen aus dem Bisherigen sind:

1. Jede Potenz mit negativem Exponenten ist einem Bruche gleich, der die Einheit zum Zähler, die Potenz mit einem gleichen positivem Exponenten zum Nenner hat.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{§. } 186).$$

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} \quad (\text{§. } 188).$$

Man darf noch allgemeiner sagen: jede Potenz kann als ein Bruch dargestellt werden, der die Einheit zum

Zähler, die Potenz mit entgegesetztem Exponenten zum Nenner hat.

Denn es ist auch $\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n$.

Jedem Bruche kann durch die Umkehrung dieses Satzes wieder die Form einer ganzen Zahl gegeben werden.

Es ist $\frac{z}{n} = z \cdot \frac{1}{n} = z \cdot \frac{1}{n^1}$ (vergl. §. 191)

$= z \cdot n^{-1}$.

2. Jede Potenz mit gebrochenem Exponenten ist einer Wurzelgröße gleich, wobei der Wurzelgrad der Nenner des Exponenten, und die Größe unter dem Wurzelzeichen, die Wurzel mit dem Zähler des Exponenten als Exponent ist.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad (\text{§. } 187).$$

§. 190.

Auch das Zeichen Null kann zum Exponenten einer Potenz angenommen werden. Es ist zwar im Allgemeinen nicht möglich diesem Zeichen, als dem der Andeutung des Nichtvorhandenseyns einer Größe, die Bedeutung einer solchen unterzuschieben; da dasselbe als Exponent einer Potenz aber nur dazu dienen soll, ein Verfahren anzugeben, nach welchem auf gleiche Art, wie er aus der Einheit durch Zusammensetzung von Theilen entstanden ist, die Potenz aus der Wurzel durch Zusammensetzung von Factoren gebildet wird, so ist es möglich, den Werth dieser Potenz wirklich zu realisiren. Durch Aufhebung gleicher Theile entsteht Null; es mögen also die Einheit selbst und ihr Entgegengesetztes, als Theile verbunden, die Bildung der Null aus der Einheit angeben, so muß zur Bildung der Potenz dieses Exponenten,

auch die Wurzel selbst und das ihr als Factor Entgegengesetzte, durch Multiplication verbunden werden, wodurch die Einheit entsteht; denn $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$. Es ist demnach jede Potenz des Grades Null gleich der Einheit. ($a^0 = 1$).

Warum man aus $a^0 = b^0$, nicht schließen darf $a = b$.

§. 191.

Wird die Einheit zum Exponenten einer Größe gemacht, so ist die Potenz gleich der Wurzel; denn in diesem Falle fordert der Exponent einmaliges Setzen der Wurzel ($a^1 = a$). Umgekehrt kann also jeder Zahl, unbeschadet ihres Werths, der Exponent 1 gegeben, oder sie kann die erste Potenz genannt werden. Ist aber Eins die Wurzel einer Potenz, so ist diese für jeden Werth des Exponenten selbst wieder gleich Eins. Denn

$$1^0 = 1;$$

$$1^n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot = 1;$$

$$1^{-n} = \frac{1}{1^n} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$1^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{1^p} = \sqrt[q]{1} = 1.$$

Das Letztere, weil, wie sich aus der Erklärung der Wurzelausziehung (§. 178) ergiebt, der Ausdruck $\sqrt[q]{1}$ die Hervorbringung einer Größe bedeutet, welche qmal als Factor gesetzt $= 1$ ist, welches offenbar 1 selbst leistet.

Anmerk. Die Analysis lehrt zwar, daß noch andere Werthe als 1 für $\sqrt[q]{1}$ aufzustellen sind, doch hebt dies die Annahme nicht auf, daß jener für den Ausdruck zulässig ist.

§. 192.

Den Gegenstand der nächsten Untersuchungen betreffen die Erhebung zur Potenz und Ausziehung der Wurzeln. —

Von den Potenzen des zweiten und dritten Grades und Ausziehung der Wurzeln dieser Grade, wird zuerst im Speciellen und sehr ausführlich gehandelt werden; sowohl deshalb, weil sich daraus die Regeln für diese Operationen bei höhern Graden im Allgemeinen ergeben, oder doch deren Ableitungen dadurch vorbereitet und erleichtert werden, als auch, weil sie am meisten in practischen Anwendungen vorkommen.

Hierauf werden wir zeigen, wie an und mit Größen, die als angedeutete Potenzen beliebiger Grade gegeben sind, selbst wieder Operationen vorgenommen werden, oder zu den Rechnungsarten mit Potenzen fortschreiten. Erst dann sind wir im Stande, uns in der Lehre von den Logarithmen zu der letzten Hauptaufgabe, welche nach §. 179 der Begriff von Potenz mit sich bringt, zu wenden.

Zweites Capitel.

Von der Erhebung zum Quadrate und der Ausziehung der Quadratwurzel.

Erhebung zum Quadrate im Allgemeinen und Beziehung des Quadrats zu seiner Wurzel.

§. 193.

Die zweite Potenz einer Zahl heißt auch das **Quadrat** derselben, und diese Zahl selbst insofern die **Quadratwurzel**.

Um eine Zahl zur zweiten Potenz zu erheben, muß man sie zweimal als Factor setzen (§. 177), oder mit sich selbst multipliciren. Diese Operation wird **Erhebung zum Quadrate (Quadriren)** genannt.

Z. B. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; $a^2 = a \cdot a$.

Die Regeln für das Quadriren und die Beziehung des Quadrats zu seiner Wurzel, der bei Bildung desselben zum Grunde gelegten Zahl, werden sich daher nur als Eigenthümlichkeiten der Multiplication von zwei gleichen Größen in einander ergeben.

§. 194.

Das Quadrat jeder ganzen Zahl ist eine ganze Zahl, und desto größer, je größer die Wurzel ist. Denn das Product zweier ganzen Zahlen entsteht durch ein so vielmaliges Setzen der einen, als die andere angiebt; dies Product wird mithin desto größer, je größer beide sind, und immer wieder eine ganze Zahl.

Das Quadrat der größern Zahl übertrifft also das der kleinern noch mehr, als sich die Würzeln übertreffen.

§. 195.

Das Quadrat eines Products wird hervorgebracht, indem man alle Factoren desselben quadrirt und wieder durch Multiplication verbindet. Denn, wenn zwei Producte in einander multiplicirt werden, so erscheinen alle Factoren derselben in dem daraus gebildeten Producte wieder (§. 55); das Quadrat eines Products wird durch Multiplication desselben mit sich selbst, also mit einem zweiten Producte, welches dieselben Factoren enthält, erzeugt; jeder Factor kommt daher nun zweimal als solcher, d. h. im Quadrate, in dem Resultate vor.

Z. B. $(ab)^2 = abab$, und da die Ordnung der Factoren willkührlich ist, $= aabb = a^2b^2$.

Eben so ist $(abc)^2 = a^2b^2c^2$, u. dgl. m.

§. 196.

Das Quadrat eines Bruchs entsteht, indem man das Quadrat seines Zählers zum Zähler,

das

das Quadrat seines Nenners zum Nenner eines neuen Bruchs macht.

Denn bei der Multiplication des Bruchs mit sich selbst werden zwei Brüche in einander multiplicirt, deren Zähler unter sich und deren Nenner unter sich gleich sind; das nach der Regel für die Multiplication zweier Brüche gebildete Product der Zähler giebt also das Quadrat des anfänglichen Zählers, und das Product der Nenner, das Quadrat des anfänglichen Nenners, welche wieder respective zu Zähler und Nenner eines neuen Bruchs gemacht werden müssen.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \,.\, a}{b \,.\, b} = \frac{a^2}{b^2}.$$

§. 197.

Es ist wichtig, über das Quadrat eines Bruchs Folgendes zu bemerken.

Aus §. 194 folgt, daß wenn der Zähler eines Bruchs kleiner oder größer als sein Nenner ist, im Quadrate desselben, der Zähler um so mehr kleiner oder größer als der Nenner seyn wird; das Quadrat eines Bruchs also ein ächter oder unächter Bruch wird, je nachdem es die Wurzel ist. Ferner, da im Zähler das Quadrat des Zählers und im Nenner das Quadrat des Nenners des anfänglichen Bruchs steht, so können, wenn in diesem, Zähler und Nenner keine gemeinschaftliche Factoren haben, auch in denen seines Quadrats solche nicht vorkommen; denn es erscheinen darin dieselben Zahlen nur jede zweimal als Factor wieder. Liegen z. B. in a und b keine gemeinschaftliche Factoren, so werden eben so wenig in aa und bb dergleichen enthalten seyn. Daher:

1) Das Quadrat eines ächten Bruchs wird ein kleinerer ächter Bruch als er selbst ist.

2) Ein unächter Bruch zum Quadrate erhoben, giebt

einen größern unächten Bruch; und wenn in jenem der Nenner nicht in dem Zähler aufgeht, also nicht etwa nur die Bruchsgestalt für eine ganze Zahl geschrieben ist, so kann es auch in diesem nicht der Fall werden (§§. 82. 83), oder das Quadrat eines eigentlichen Bruchs kann nie einer ganzen Zahl gleich seyn.

§. 198.

Das Quadrat jeder Größe ist positiv, sie selbst, die Wurzel, sey positiv oder negativ.

Denn, da das Quadrat einer Größe entsteht, indem diese zweimal als Factor gesetzt, also ein Product aus zwei Factoren gebildet wird, welche mit gleichen Zeichen behaftet sind, so erscheint nach der in der Multiplication darüber bewiesenen Regel etwas Positives.

$$(+a)^2 = (+a) \cdot (+a) = +a^2$$
$$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = +a^2.$$

§. 199.

Das Quadrat einer zweitheiligen Größe, welche allgemein durch $(a+b)$ angedeutet werden mag, findet sich durch Berechnung des entstehenden Products, wenn man sie mit sich selbst multiplicirt. Nämlich:

$$(a+b) \cdot (a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

Aus der Form dieses Quadrats ergiebt sich, daß es aus seiner Wurzel dadurch gebildet wird, daß man das Quadrat ihres ersten Theils, das doppelte Product aus ihrem ersten in den zweiten Theil, und das Quadrat ihres zweiten Theils, als Theile vereinigt.

§. 200.

Die Kenntniß der Beziehung des Quadrats einer zweitheiligen Größe zu seiner Wurzel ist von großer Erheblichkeit, sowohl weil wir dadurch das Mittel erhalten, jede belie-

dige vieltheilige Größe, ohne unmittelbare Multiplication mit sich selbst, quadriren zu können, als auch besonders deshalb, weil, wenn eine gewisse zusammengesetzte Größe in seine Form gebracht werden kann, die Wurzel, durch deren Quadriren sie entstanden, sogleich zu erkennen und anzugeben ist. — Von dem Letztern wird unter der Rubrik, Ausziehung der Quadratwurzel, weiter die Rede seyn.

Was das Erstere anbetrifft, so geht es sehr leicht daraus hervor, daß man die im vorhergehenden §. enthaltene Regel des Quadrirens einer zweitheiligen Größe, folgendermaßen ausspricht:

Ist das Quadrat einer gewissen Größe (a) schon gefunden (a^2), und kommt zur Wurzel eine neue Größe (b) hinzu, so erhält das Quadrat der erstern einen Zuwachs von zwei Partialproducten, nämlich von dem doppelten Producte der ersten in die neu hinzukommende Größe (2ab) und vom Quadrate der letztern (b^2). Nun mag die unter a verstandene Größe eintheilig, oder schon selbst mehrtheilig seyn, die Anwendung dieser Regel leidet dadurch keine Abänderung.

§. 201.

Eine vieltheilige Größe wird demnach quadrirt, indem man das Quadrat der beiden ersten Theile berechnet; dann den Inbegriff dieser als den ersten, den dritten Theil als einen neu hinzukommenden betrachtet, also zu dem schon gefundenen Quadrate der ersten beiden Theile, die nach obiger Regel geforderten zwei Partialproducte hinzusetzt; nun den Inbegriff der drei ersten Theile wieder als den ersten und den vierten als die neu hinzukommende Größe ansieht, und so fortfährt, bis endlich der letzte Theil als zweiter und der Inbegriff aller vorhergehenden als erster Theil der Wurzel erscheint.

Beispiele.

$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2,$

und durch Entwickelung der Größe $2(a + b)c$,

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2;$

$(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2,$

und durch Entwickelung der Klammer-Größen

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2.$

Einfache mechanische Regel, welche sich aus diesem Schema für das Quadriren vieltheiliger Buchstaben-Größen ergiebt.

§. 202.

Sind unter den Theilen einer Größe negative, so wird dies im Quadrate derselben nur auf die Zeichen der doppelten Producte Einfluß haben, sie werden positiv oder negativ, je nachdem zwei Theile mit gleichen oder ungleichen Zeichen darin als Factoren stehen; die Quadrate aller Theile bleiben positiv (§. 198). Z. B.

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$

$(a - b - c)^2 = a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2.$

Kommen ferner unter den Theilen der zu quadrirenden Größe, Producte oder Brüche vor, so ergeben sich ihre Quadrate nach den §§. 195 und 196.

Beispiele.

$$\left(1 - n + \frac{c}{2}\right)^2 = 1 - 2n + n^2 + c - nc + \frac{c^2}{4};$$

$$\left(ax - b - \frac{c}{d} + m\right)^2 = a^2x^2 - 2axb + b^2 - \frac{2axc}{d} + \frac{2bc}{d} + \frac{c^2}{d^2} + 2axm - 2bm - \frac{2cm}{d} + m^2.$$

Anwendung der Regeln über das Quadriren auf vielziffrige Zahlen des decadischen Zahlensystems.

§. 203.

Das Quadrat jeder einfachen Zahl ist durch das Einmaleins gegeben. Das einer vielziffrigen Zahl kann zwar

durch unmittelbare Multiplication sogleich berechnet werden; zur genauern Kenntniß des Zusammenhanges dieses Quadrats mit seiner Wurzel, wird es aber nöthig, die so eben abgeleiteten allgemeinen Regeln des Quadrirens vieltheiliger Größen darauf anzuwenden.

§. 204.

Jede vielziffrige Zahl besteht aus so vielen Theilen als sie Ziffern enthält; diese Theile sind aber Einheiten verschiedener Ordnungen. Drückt man die Zahl ihrem Werthe nach so aus, daß die Vereinigung ihrer Theile angedeutet wird, so ist die Anwendung jener Regel des Quadrirens an sich klar, und beruht nur auf einer Substitution von Zahlenwerthen für die im Vorhergehenden gebrauchten unbestimmten Zeichen. Z. B.

$$(463)^2 = (400 + 60 + 3)^2 =$$
$$(400)^2 + 2 \,.\, 400 \,.\, 60 + (60)^2 + 2 \,.\, 3 \,.\, 400 + 2 \,.\, 3 \,.\, 60 + (3)^2$$
$$= 160000 + 48000 + 3600 + 2400 + 360 + 9 = 214369.$$

§. 205.

Indessen würde dies Verfahren nicht dazu dienen, uns sogleich zu zeigen, wie die einzelnen Ziffern der vielziffrigen Zahl zu dem Quadrate derselben beitragen.

Man darf jedoch die einzelnen Ziffern ohne Weiteres selbst als Theile der vielziffrigen Zahl ansehen, und die für das Quadrat derselben geforderten Partialproducte daraus berechnen, wenn man dabei nur deren Rang, nach denen der Ziffern, gebührend bestimmt. — Dies stützt sich nun auf folgende Bemerkung. Wenn man die Multiplication zweier vielziffriger Zahlen so ausführt, daß man erst mit der höchsten Ziffer des Multiplicators, und dann nach und nach mit den successiv niedern desselben, den Multiplicand multiplicirt, so muß jede der dadurch erhaltenen Reihen mit ihrer niedrigsten Ziffer um eine Stelle zur Rechten gerückt werden, damit sie ihrer Ordnung gemäß zum Addiren unter einander zu stehen

kommen. (§. 59). — Unter den bei der Berechnung des Quadrats einer vielziffrigen Zahl entstehenden Partialproducten: Quadrat des ersten Theils, doppeltes Product aus dem ersten in den zweiten, und Quadrat des zweiten Theils, findet aber eben diese Rangfolge Statt. Denn, wenn die höchste Ziffer jener Zahl den ersten Theil (a), die nächstniedrige den zweiten Theil (b) bedeuten soll, so müssen jene Partialproducte (aa, 2ab, bb), weil in jedes folgende ein Factor von einem um eins geringern Grade eintritt, der Reihe nach, um eins im Range niedriger werden. Die Multiplication mit 2, welche zur Bildung der doppelten Producte geschieht, kann diese Rangfolge nicht abändern, da ihr Rang Null ist (§. 59). Auch wenn der erste Theil demnächst den Inbegriff mehrerer Ziffern bedeutet, ist immer diejenige, welche nun als zweiter Theil erscheint, im Range um eins niedriger.

Hieraus fließt für das Quadriren vielziffriger Zahlen, wobei man die auf einander von der Linken zur Rechten folgenden Ziffern als Theile einer vieltheiligen Größe ansehen will, die Regel:

man setze die für das Quadrat derselben nach §. 199 berechneten Partialproducte, zu ihrer Addition so, daß die niedrigste Ziffer von jedem folgenden um eine Stelle weiter zur Rechten zu stehen kommt.

Beispiele. Es sey $(537)^2$ zu berechnen, so sind die einzelnen entstehenden Producte, mit dem beigefügten Schema, wornach ihre Berechnung geschieht:

5^2	=	25 . . .	nämlich	a^2
$2.5.3$	=	30 . . .	„	$2ab$
3^2	=	9 . .	„	b^2
$2.53.7$	=	742 .	„	$2(a+b)c$
7^2	=	49	„	c^2
$(537)^2$	=	288369	„	$a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$.

Es sey ferner das Quadrat von 6041 zu berechnen, so hat man, die dabei hervorgehenden Partialproducte in ihrer Ordnung unter einander stellend:

```
36
  0
   0
  480
    16
   1208
      1
―――――――――――――――――――――
36493681 = (6041)²
```

Warum die letzte Ziffer einer Quadrat-Zahl entweder 0, 1, 4, 5, 6, 9 und keine andere seyn kann, und wie man daraus schließen darf, daß eine Zahl keine Quadratzahl sey, jedoch nicht umgekehrt.

§. 206.

Indem man auf diese Art das Quadrat einer vielziffrigen Zahl berechnet, nimmt man von jeder Ziffer nach und nach das Quadrat. Zwischen diesen Quadraten liegen immer die doppelten Producte aus der ersten Ziffer oder dem Inbegriff der ersteren in die folgende. Jedes dieser Partialproducte steht mit seiner letzten Ziffer in einer um eins niedrigern Stelle als das vorhergehende, und mit dem Quadrate der niedrigsten Ziffer der Wurzel schließt die Berechnung. Dieses endigt mithin in der Stelle der Einer oder in der Stelle des Ranges Null; das Quadrat der vorhergehenden Ziffer in der Stelle des zweiten Ranges, das dieser vorhergehenden in der Stelle des vierten Ranges, und so fort; so daß das Quadrat der höchsten Ziffer in der Stelle des Ranges endigt, welcher zweimal so hoch als der ihrige ist. Daraus folgt, daß die Quadrate der einzelnen Ziffern in dem Quadrate der Zahl mit ihren niedrigsten Ziffern sämmtlich in den Stellen *geraden* Ranges zu stehen kommen; und zwischen diesen, in den Stellen *ungerader* Ordnung, die doppelten Producte aus zwei auf einander folgenden Theilen der Wurzel, mit ihren niedrigsten Ziffern liegen.

§. 207.

Das Quadrat einer Zahl wird eben so viele Stellen geraden Ranges enthalten, als sie (die Wurzel) Ziffern enthält. Daß gewiß so viele Stellen vorkommen, folgt unmittelbar aus dem vorigen §., da bei der Berechnung des Quadrats einer Zahl nach und nach von jeder Ziffer derselben das Quadrat genommen und so gestellt wird, daß es mit seiner niedrigsten Ziffer allemal eine neue Stelle gerader Ordnung, mit der Stelle des Ranges Null schließend, hergiebt. Daß aber auch durch das Zusammenzählen aller Partialproducte, welche das vollständige Quadrat ausmachen, nicht noch mehr solcher Stellen entstehen können, ergiebt sich daraus, weil durch die Multiplication zweier vielziffriger Zahlen ein Product erscheint, welches höchstens im Range ums eins höher ist, als die Summe der Ordnungen der in einander multiplicirten Zahlen (§. 60), mithin, wenn sie gleiches Ranges sind, als der doppelte Rang von einer. Nun ist vorhin bewiesen, daß das Quadrat der höchsten Ziffer mit ihrer niedrigsten Ziffer im Quadrate der Zahl, in derjenigen Stelle steht, deren Rang gleich dem Doppelten des Ranges dieser Ziffer ist; — da nun nicht noch zwei Stellen mehr vorkommen dürfen, so kann das Addiren jener Partialproducte auch nicht noch eine Stelle gerader Ordnung mehr hervorbringen.

Ausziehung der Quadratwurzel im Allgemeinen.

§. 208.

Die Wurzel des zweiten Grades oder die Quadratwurzel aus einer Zahl ziehen, heißt sie in zwei gleiche Factoren zerlegen, ein solcher Factor ist die gesuchte Wurzel (§. 178). Multiplicirt man diese mit sich selbst, so muß also die Zahl wieder erscheinen, deren Quadratwurzel sie ist; — daher auch Ausziehung der Quadratwurzel, durch:

Aufsuchung einer Zahl, welche, mit sich selbst multiplicirt, einer gegebenen gleich kommt, erklärt werden kann. Die Andeutung dieser Operation geschieht durch das Zeichen $\sqrt{}$, indem man den Grad der auszuziehenden Wurzel hier vorzugsweise wegläßt.

§. 209.

Die im Vorhergehenden abgeleiteten Beziehungen des Quadrats zu seiner Wurzel gestatten es, aus der Beschaffenheit einer gegebenen Zahl, gewisse Schlüsse auf die ihrer Quadratwurzel zu machen. Jene muß man daher bei der Ausziehung der Quadratwurzel immer vor Augen haben; denn diese Operation bringt es mit sich, daß die Zahl, an welcher sie vorgenommen werden soll, als ein Quadrat, d. h. als durch die Multiplication zweier gleicher Factoren entstanden, angesehen werde, wenn gleich, wie die Folge ergiebt, beliebige Zahlen solches nur selten wirklich seyn werden.

§. 210.

Erkennt man auf den bloßen Anblick eine Größe als das Quadrat einer bekannten Wurzel, so kann die Ausziehung der Quadratwurzel aus ihr ohne Weiteres geschehen. Dies ist im Allgemeinen aber nur da der Fall, wo die Erhebung zum Quadrate bei einer Größe angedeutet ist, und aus einem solchen Ausdrucke die Quadratwurzel gezogen werden soll: die Operation wird dann offenbar durch das Weglassen des Exponenten 2 verrichtet. Z. B.

$$\sqrt{a^2} = a; \sqrt{(345)^2} = 345.$$

§. 211.

Zahlen, welche durch das Quadriren gewisser anderer entstanden seyn können, heißen Quadratzahlen (vollständige Quadrate). Bildet man die Quadrate der natürlichen Zahlen ihrer Reihe nach, so hat man:

$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
u. s. w.

Die Zahlen 1, 4, 9, 16, 25 u. s. w. sind demnach Quadratzahlen.

Diejenigen ganzen Zahlen aber, welche zwischen zwei auf einander folgenden Quadratzahlen liegen, sind nicht durch Multiplication irgend einer andern mit sich selbst entstanden; denn diese müßte eine ganze Zahl, kleiner als die Quadratwurzel der größern, und größer als die Quadratwurzel der kleinern Quadratzahl seyn (§. 194), und ein zwischen eben diesen Grenzen liegender Bruch kann nicht dafür genommen werden (§. 197). Umgekehrt ist daher für keine von solchen Zahlen die Quadratwurzel anzugeben, eben weil keine Zahl aufzustellen ist, die, mit sich selbst multiplicirt, sie hervorbrächte. — Z. B. die Quadratwurzel der Zahl 20 ist nicht anzugeben; denn 20 liegt zwischen den Quadratzahlen 16 und 25, ihre Quadratwurzel müßte also zwischen 4 und 5 liegen, und dabei eine ganze Zahl seyn, und es existirt zwischen zwei um eine Einheit verschiedenen ganzen Zahlen überall keine ganze Zahl.

Da in der Reihe der Quadratzahlen zwischen zwei auf einander folgenden immer mehrere ganze Zahlen liegen, so kommen dergleichen sehr viele vor, woraus sich nicht die Quadratwurzel ziehen läßt. Dasselbe wird sich auch bei Brüchen ereignen, indem deren Quadratwurzel durch die aus ganzen Zahlen bestimmt werden muß. (Siehe §. 215).

§. 212.

Wenn die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer

Zahl verlangt wird, welche ihrer Größe nach kein Product aus zwei gleichen Factoren ist, so ist also diese Operation nicht wirklich auszuführen, und man nennt den Ausdruck, in welchem sie vorgeschrieben ist, einen Irrational-Ausdruck. Z. B. $\sqrt{20}$.

Da aber dieselbe Unmöglichkeit bei der Ausziehung der Wurzeln aller Grade eintreten kann, und man die dadurch hervorgehenden Ausdrücke dann immer irrationale nennt, so hat man die Bedeutung dieses Namens allgemeiner so zu fassen, daß ein Irrational-Ausdruck überhaupt derjenige genannt wird, worin die Zerfällung einer Zahl in eine Anzahl gleicher Factoren verlangt wird, woraus sie ihrer Größe nach kein Product ist.

Wenn es nun gleich die Größen-Beschaffenheit einer Zahl in sich schließt, daß ein Irrational-Ausdruck nie einer bestimmten Zahl gleich gesetzt werden kann, so wird sich doch zeigen, daß man im Stande ist, eine, seiner Forderung beinahe und zwar bis auf jeden beliebigen Grad der Genauigkeit entsprechende, Zahl zu finden.

So lange eine Größe unbestimmt angedeutet und ihrer Gestalt nach kein vollständiges Quadrat ist, bleibt auch für die Ausziehung der Quadratwurzel aus ihr, nur die Andeutung übrig; z. B. $\sqrt{a}$; — weshalb man Ausdrücke dieser Art ebenfalls Irrational-Größen nennt, und sie den rationalen, solchen entgegensetzt, vor welchen kein Wurzelzeichen steht, oder bei welchen doch die, durch ein solches angezeigte, Operation jederzeit wirklich vollzogen werden kann.

Anmerkung. Man pflegt den Begriff von Irrationalität noch weiter auszudehnen, und eine Größe irrational zu nennen, wenn sie mit der Einheit incommensurabel ist, also durch eine Zahl nie genau ausgedrückt werden kann (§. 15. Anmerk.). Die dafür annäherungsweise angenommene Zahl ist zwar insoweit eine bestimmte, deutet man aber darin an,

daß ihr noch etwas fehlt, und sie mithin nicht als geschlossen betrachtet werden kann, so heißt sie selbst eine Irrational=Zahl. Wenn ein gemeiner Bruch sich nicht genau in einen Decimalbruch verwandeln läßt, so kann hiernach der daraus hervorgehende Decimalbruch, indem man ihn als sich nicht schließend ansieht, eine Irrational=Zahl genannt werden.

§. 213.

Entgegengesetzte, übrigens gleiche Größen gaben ein gleiches positives Quadrat (§. 198). Die Quadratwurzel aus einer positiven Größe, kann daher sowohl positiv als negativ genommen werden, in beiden Fällen aber gleich groß. Es ist z. B.

$\sqrt{a^2} = + a$ oder $= - a$.

Die Ausziehung der Quadratwurzel führt also eine Zweideutigkeit mit sich. Man schreibt aus diesem Grunde, wenn ihre Operation nur angedeutet wird und dieser Ausdruck mit andern vereinigt werden soll, die Zeichen $+$ und $-$ vor das Wurzelzeichen. Z. B. $a \pm \sqrt{b}$.

§. 214.

Ein Product wird durch Erhebung jedes seiner Factoren zum Quadrate, quadrirt; umgekehrt muß man daher, wenn die Quadratwurzel aus einem Producte gezogen werden soll: aus jedem Factor desselben die Quadratwurzel ziehen, und diese wieder als Factoren verbinden. Z. B. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

§. 215.

Aus einem Bruche wird aus gleichen Gründen (§. 196) die Quadratwurzel gezogen, indem man:

die Quadratwurzel seines Zählers und die seines Nenners, wiederum zum Zähler und Nenner eines Bruchs macht.

3. B. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Auch wird die Quadratwurzel eines eigentlichen Bruchs gewiß wieder ein solcher, ächt oder unächt, je nachdem er es ist. (§. 197).

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus einem Bruche kömmt also auf die aus ganzen Zahlen zurück.

§. 216.

Man kann jeden Bruch dahin bringen, daß die Quadratwurzel aus einem seiner Ausdrücke, aus seinem Zähler oder aus seinem Nenner, sich sogleich angeben läßt, (daß einer von beiden rational werde), so daß die Andeutung dieser Operation, wenn sie an dem Bruche geschehen soll, nur noch bei dem Nenner oder bei dem Zähler desselben nöthig wird.

Man multiplicirt nämlich Zähler und Nenner des Bruchs in dem einen Falle mit dem Zähler, in dem andern, mit dem Nenner desselben, wodurch jener oder dieser den Exponenten 2 erhält, die Ausziehung der Quadratwurzel daraus mithin geschehen kann.

Es ist $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a^2}{ab}} = \frac{a}{\sqrt{ab}}$; oder

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

In speciellen Fällen kann noch auf andere Art die Rationalität des Zählers oder Nenners eines Bruchs bewirkt werden.

§. 217.

Da das Quadrat jeder Zahl positiv ist, so kann nie eine negative Zahl als ein Product aus zwei gleichen Factoren angenommen werden, oder es läßt sich keine Zahl denken, die zum Quadrate erhoben sie hervorbrächte; mit andern

Worten: aus einer negativen Zahl läßt sich nicht die Quadratwurzel ziehen.

Wenn daher beim Operiren mit Zahlen eine negative Zahl unter dem Quadratwurzel-Zeichen zu stehen kommt, so nennt man diesen Ausdruck einen Unmögliches fordernden Ausdruck, und wenn er nicht durch gewisse Verbindungen mit andern Ausdrücken wiederum verschwindet, so enthält die Aufgabe, welche darauf geführt hat, selbst etwas Unmögliches, oder etwas den möglichen Verknüpfungen von Zahlen Widersprechendes.

Ein Ausdruck: wie allgemein: $\sqrt{-a}$ kann also nie einer reellen Größe gleich gesetzt werden, und im Gegensatze zu solchen pflegt er eine unmögliche, auch imaginaire Größe genannt zu werden.

Diese Größen sind von den irrationalen wohl zu unterscheiden. Wenn gleich die letztern eben so wohl keinen reellen Größen gleich gesetzt werden können, so lassen sich für sie doch Grenzen angeben, zwischen welchen sie, wenn sie nur möglich wären, liegen würden.

Da jede negative Zahl als ein Product aus einer gleichgroßen positiven in den Factor (— 1) angesehen werden kann, so läßt sich aus dem einen Factor des durch diese Zerlegung entstandenen Products, die Quadratwurzel ausziehen; so, daß ein imaginairer Ausdruck wie $\sqrt{-a}$, allemal auf die Form $b\sqrt{-1}$ gebracht werden kann, indem man unter b die Quadratwurzel aus a versteht; denn

$\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$ (§. 214).

§. 218.

Soll sich aus einer aus Theilen zusammengesetzten Größe die Quadratwurzel wirklich ausziehen lassen, d. h. diese Operation dabei nicht in einer bloßen Andeutung bestehen, so ist es nöthig, daß diese Größe auf die bewiesene

Form des vollständigen Quadrats einer zwei oder mehrtheiligen Größe zurückgeführt werden kann. Man verfährt zur Entdeckung der Wurzel aber umgekehrt; man nimmt an, die gegebene Größe sey ein vollständiges Quadrat und habe dessen Form, und mittelt durch Versuche eine Größe aus, die unter dieser Voraussetzung als deren Wurzel angenommen werden müßte — ob, und wie nahe sie es wirklich ist, findet man alsdann durch Vergleichung ihres berechneten Quadrats mit der gegebenen Größe.

§. 219.

Bei Buchstaben-Ausdrücken, worin die Vereinigung der Theile nur angedeutet wird, diese selbst also sichtbar bleiben, ist über die Aufsuchung ihrer Quadratwurzel Folgendes zu bemerken.

Das Quadrat einer eintheiligen Größe ist selbst eintheilig; das einer zweitheiligen ist dreitheilig. Aus einer zweitheiligen Größe läßt sich also die Quadratwurzel nicht wirklich ausziehen. Wenn aber eine dreitheilige gegeben ist, und so geformt werden kann, daß in ihrem ersten Theile das Quadrat einer Größe, im zweiten das doppelte Product dieser Größe in eine gewisse andere, und im dritten Theile das Quadrat der letztern, und zwar so steht, daß der erste und dritte Theil positiv ist, so wird die Quadratwurzel dieser Größe, die Summe oder Differenz der Quadratwurzeln aus dem ersten und dritten Theile seyn, je nachdem der zweite Theil mit dem Zeichen + oder — behaftet ist. (§. 199. §. 200).

§. 220.

Es kömmt daher bei einer zur Ausziehung der Quadratwurzel gegebenen dreitheiligen Größe darauf an, zu untersuchen, ob die Division des zweiten Gliedes dersel-

ben durch das Doppelte der Quadratwurzel aus ihrem ersten Theile, eine Größe hervorbringt, deren Quadrat dem dritten Theile der gegebenen Größe gleich ist; denn durch diese Division findet man die, als zweiten Theil der Wurzel anzunehmende Größe, unter der Voraussetzung, daß das zweite Glied der gegebenen Größe das doppelte Product aus dem ersten in den zweiten Theil ihrer Wurzel ausmacht. — Den ersten Theil der gesuchten Wurzel bestimmt man also immer als die Quadratwurzel aus dem ersten Theile der gegebenen Zahl, und zieht nun das doppelte Product des ersten in den auf jene Art bestimmten zweiten Theil der Wurzel, plus dem Quadrate des letztern, von dem, nach Absonderung des ersten Theils der gegebenen Größe, von dieser Uebrigbleibenden ab; bleibt bei diesem Abziehen kein Rest, so ist die gesuchte Quadratwurzel genau gleich dem Inbegriff jener beiden Theile, widrigenfalls der Rest zeigt, um wie viel sich die gegebene Größe von dem vollständigen Quadrate der so gefundenen Wurzel unterscheidet.

Ein zu einer solchen Berechnung bequemes Schema zeigen folgende Beispiele:

Im Isten: $4a^2 + 12ab + 9b^2$ die gegebene Größe, woraus die Quadratwurzel gezogen werden soll; man sondert den ersten Theil durch einen Verticalstrich ab, und schreibt die Quadratwurzel (2a) dieses Theils rechts der gegebenen Größe, durch ein Gleichheitszeichen davon getrennt. Der Divisor (4a) zur Bestimmung des zweiten Theils wird unter das zweite Glied (12ab) jener geschrieben, welches dadurch dividirt werden soll; der gefundene Quotient (3b) als zweiter Theil der Wurzel neben dem ersten, und zugleich zur Rechten des Divisors gesetzt; der so vermehrte Divisor (4a + 3b) mit dem zweiten Theile der Wurzel multiplicirt, und dies Product endlich subtrahirt.

I.

$$\text{I.}\quad \sqrt{4a^2 \mid + 12ab + 9b^2} = 2a + 3b$$
$$(4a + 3b)$$
$$\underline{12ab + 9b^2}$$
$$0$$

$$\text{II.}\quad \sqrt{a^2 \mid + \frac{ab}{c} + \frac{b^2}{4c^2}} = a + \frac{b}{2c}$$
$$\left(2a + \frac{b}{2c}\right)$$
$$\underline{\frac{ab}{c} + \frac{b^2}{4c^2}}$$
$$0$$

$$\text{III.}\quad \sqrt{m^2 \mid - 4mcb + 4c^2b^2} = m - 2cb$$
$$(2m \quad - 2cb)$$
$$\underline{- 4mcb + 4c^2b^2}$$
$$0$$

$$\text{IV.}\quad \sqrt{x^2 \mid + 2ax + \frac{1}{4}a^2} = x + a$$
$$(2x + a)$$
$$\underline{2ax + a^2}$$
$$\text{Rest} - \frac{3}{4}a^2.$$

Im letzten Beispiele ist wegen des gebliebenen Restes $\left(- \frac{3}{4}a^2\right)$ die gegebene Größe kein vollständiges Quadrat, und es müßte ihr $\frac{3}{4}a^2$ hinzugesetzt werden, damit sie dem Quadrate der gefundenen Wurzel $x + a$ gleich würde.

§. 221.

Auf ähnliche Art ließen sich Regeln für die Ausziehung der Quadratwurzel aus dem Quadrate einer dreitheiligen, einer viertheiligen u. s. w., jeder vieltheiligen Wurzel ableiten, indem man nur die durch Quadriren bewiesene Form desselben gehörig berücksichtigte. Indessen haben diese Untersuchun-

gen wenig Nutzen, da sie durch höhere Rechnungsarten entbehrlich gemacht werden, durch welche man allgemeiner aus jeder Größe, wenn sie auch nicht die Gestalt eines Quadrats hat, die Quadratwurzel in so weit auszuziehen im Stande ist, wie es die Natur dieser Operation überhaupt gestattet.

Anmerkung. So wie bei der Division zusammengesetzter Buchstaben-Ausdrücke gewisse Voraussetzungen bei der Form derselben gemacht werden mußten, wenn die Operation nicht in einer bloßen Andeutung bestehen sollte, — eben so ist man in der niedern Arithmetik auch an bestimmte Annahmen bei den Größen gebunden, woran die Wurzelausziehung wirklich ausgeführt werden soll, oder man muß sich auch dabei mit einer Andeutung begnügen.

Ausziehung der Quadratwurzel aus bestimmten Zahlen.

§. 222.

Da die Ausziehung der Quadratwurzel bei den meisten Zahlen auf Irrationalitäten führt (§. 211), so beschränkt sich die Untersuchung zunächst darauf, für eine gegebene ganze Zahl diejenige zu finden, welche in ganzen Zahlen die niedrigste Grenze ihrer Quadratwurzel angiebt, d. h. die zum Quadrate erhoben sich noch von der gegebenen abziehen läßt, und, um eine Einheit erhöht, im Quadrate schon etwas größeres als diese seyn würde. Hat die Zahl eine genaue Quadratwurzel, so wird diese dadurch auch gefunden, — es bleibt alsdann bei jenem Abziehen kein Rest.

§. 223.

Die Quadrate aller einfachen Zahlen liegen zwischen 1 und 100; erst das Quadrat einer zweiziffrigen Zahl wird dreiziffrig. Unmittelbar durch das Einmaleins ist daher jene Aufgabe bei Zahlen unter 100 zu lösen.

Sobald die Zahlen dreiziffrig und darüber werden, muß

man zur Ausmittelung ihrer Quadratwurzeln — dem folgend, was §. 218 darüber im Allgemeinen gesagt ist — die bekannten Beziehungen eines vollständigen Quadrats zu seiner Wurzel zur Richtschnur nehmen. Die Sätze der §§. 206 und 207 sind es, die uns hier leiten.

§. 224.

1) Die Menge der Stellen gerader Ordnung, welche die gegebene-Zahl enthält, bestimmt die Anzahl der Ziffern ihrer übrigens noch unbekannten Wurzel (§. 207). Aus diesem Grunde theilt man die Zahl in Classen von zwei Ziffern, rechts anfangend, so daß die höchste Classe (die erste zur Linken) auch eine Ziffer enthalten kann. Jede Classe wird nun für die Wurzel eine Ziffer hergeben.

2) Das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel endigt in der höchsten Stelle gerader Ordnung ihres Quadrats. Diejenige einfache Zahl, deren Quadrat nach dem Einmaleins der höchsten Classe am nächsten kommt, so daß es sie nicht überschreitet, muß also die höchste Ziffer der Wurzel seyn, und wird als solche angenommen.

3) Der Rest, welcher durch die Wegnahme des Quadrats der letztern von der höchsten Classe bleibt, zeigt die Menge der Einheiten, welche die übrigen beim Quadriren der ganzen Wurzel berechneten Partialproducte in diese Classen hineinbrachten; er kann natürlich auch gleich Null seyn. Zu ihm die nächste Classe als folgende Ziffer genommen, giebt den Inbegriff, worin das doppelte Product des ersten in den zweiten Theil, und das Quadrat des zweiten Theils der Wurzel liegen muß.

4) Das doppelte Product des ersten in den zweiten Theil der Wurzel reicht bis in die erste Stelle ungerader Ordnung nach der höchsten gerader Ordnung (rechts fortschreitend), daher auch nur dieser Theil jenes Inbegriffs, also

der erste Rest und die höchste Ziffer der zweiten Classe, durch das Doppelte des ersten schon gefundenen Theils der Wurzel dividirt wird, um ihren zweiten Theil zu bestimmen.

5) Es enthält der erwähnte dividirte Theil zwar das doppelte Product aus dem ersten in den zweiten Theil der Wurzel, jedoch kann mehr darin liegen. Darum ist auch nicht immer der genaue Quotient dieser Division als zweiter Theil der Wurzel, sondern eine ganze Zahl dafür anzunehmen, die folgende Bedingung erfüllt: das Product aus ihr in den Divisor (das Doppelte des ersten Theils) und ihr Quadrat, beide in einer solchen Rangfolge vereinigt, daß letzteres um eins niedriger als ersteres gestellt ist, — weil eben die Ordnung beim Quadriren für die Stellung dieser Partialproducte beobachtet war, — müssen sich von der Zahl, welche den ersten etwaigen Rest und die zweite Classe der gegebenen ausmacht, abziehen lassen.

6) Die Berechnung und Vereinigung der genannten beiden Partialproducte geschieht, indem man den als zweiten Theil der Wurzel angenommenen Quotienten zur Rechten des Divisors setzt, und den so vermehrten Divisor mit ihm multiplicirt; die niedrigste Ziffer dieses Products unter die niedrigste der vorliegenden Classe setzend. Läßt sich dies Product abziehen, so ist der zweite Theil der Wurzel der richtige; wo nicht, so erniedrigt man ihn nach und nach um eine Einheit, damit er den größten Werth erhält, den er bekommen darf, — denn ob er zu klein angenommen ist, kann ohne eine besondere Neben-Rechnung*) nicht aus dem Reste erkannt werden.

*) Wollte man eine solche anstellen, so wäre zu untersuchen, ob der gebliebene Rest größer, als das um 1 vermehrte Doppelte der bis dahin gefundenen Wurzel sey, welchen Werth er nicht erreichen darf. Denn wenn die Wurzel mit w bezeichnet wird, und man eine um eine Einheit größere Zahl, also w + 1, annimmt, so ist

7) Zur Rechten des, bei diesem Abziehen etwa bleibenden, Restes wird die folgende Classe gesetzt, wenn noch eine vorhanden ist, und, indem man den Inbegriff der ersten beiden, bereits bestimmten Theile der Wurzel, wieder als den ersten Theil derselben ansieht, zur Auffindung ihres folgenden Theils aufs Neue verfahren, wie von Nr. 4 an gezeigt ist.

Auf solche Art setzt man die Operation fort, bis alle Ziffern der Wurzel, welche die Anzahl der Classen fordert, nach und nach bestimmt sind, und erhält dadurch die Zahl, die zum Quadrate erhoben, die größte ist, welche sich noch von der gegebenen abziehen läßt — und wenn dabei zuletzt kein Rest blieb — die Quadratwurzel selbst.

§. 225.

Die mechanischen Regeln für die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer vielziffrigen Zahl ergeben sich aus dem vorhergehenden §. von selbst, indem man bei den, in demselben aufgestellten, Momenten der Berechnung den Grund dafür wegläßt.

Folgende Beispiele zeigen das dabei übliche Rechnungs-Schema. Die Divisoren zur Bestimmung der zweiten und folgenden Ziffern der Wurzeln sind in Klammern geschlossen. Das Uebrige ist aus dem Vorhergehenden an sich verständlich.

Erstes Beispiel.

$$\sqrt{40|96} = 64$$

```
 40|96
 36|
 ----
   496
 (12)4
   496
 ----
Rest 0
```

der Unterschied der Quadrate beider Wurzeln $(w + 1)^2 - w^2 = w^2 + 2w + 1 - w^2 = 2w + 1$. Wenn die Wurzel w nicht zu niedrig bestimmt seyn soll, darf sie aber nicht um 1 größer genommen werden, das Quadrat derselben von der gegebenen Zahl abgezogen, muß mithin einen Rest geben, welcher kleiner ist als $2w + 1$.

Die Quadratwurzel aus der Zahl 4096 ist also genau gleich 64.

Zweites Beispiel.

```
 _______________
√5| 6 1|3 5|  = 2 3 6
 4|    |   |
 -----     |
 1 6 1     |
  (4)3     |
 1 2 9     |
 ---------
   3 2 3 5
    (4 6)6
   2 7 9 6
   -------
Rest 4 3 9
```

Die Quadratwurzel aus der Zahl 56135 ist also nicht 236 genau, sondern wenn 236 zum Quadrate erhoben und von 56135 abgezogen wird, so entsteht ein Rest von 439. Die Zahl 237 aber würde im Quadrate schon größer als 56135 seyn.

§. 226.

Um die Quadratwurzel einer Irrational-Zahl genauer als durch eine ganze Zahl auszudrücken, d. h. einen, zwischen zwei, um eine Einheit verschiedenen, ganzen Zahlen liegenden Bruch anzugeben, dessen Quadrat bis auf ein beliebig Kleines der gegebenen Zahl gleichkommt, ist es am einfachsten, diesen Bruch als einen Decimalbruch darzustellen. Dazu ist es nöthig, vorher zu zeigen, wie die Quadratwurzel aus einem Decimalbruche gezogen wird.

§. 227.

Wenn eine höhere Einheit durch Multiplication einer Zahl mit sich selbst, — überhaupt durch Setzen gleicher Factoren, — entstanden seyn soll, so ist es klar, daß diese Zahl selbst nur eine solche gewesen seyn kann; denn jede höhere Einheit ist ihrer Erklärung nach stets in Factoren zerlegbar, welche sämmtlich gleich 10 sind.

Quadrirt man aber eine höhere Einheit, so verdoppelt sich der Rang derselben (§. 59), oder sie wird dadurch allemal eine höhere Einheit von gerader Ordnung. Umgekehrt

werden mithin nur solche höhere Einheiten in Absicht auf die Ausziehung der Quadratwurzel rational seyn, deren Rang eine gerade Zahl ist; und ihre Quadratwurzel wird dann sogleich als eine höhere Einheit von halb so hohem Range bestimmt werden können.

Dieses festgesetzt, ergiebt es sich leicht, in welchem Falle der Nenner eines Decimalbruchs rational ist: die Anzahl der Decimalstellen muß eine gerade Zahl seyn, — und durch Anhängen einer Null hinter die letzte Decimalstelle kann dies jederzeit bewerkstelligt werden. Nun wird aus einem Bruche die Quadratwurzel gezogen, indem man sie aus seinem Zähler und Nenner zieht. Bei einem Decimalbruche hat man also nur nöthig, nachdem die Anzahl der Decimalstellen gerade gemacht ist, der Quadratwurzel des Zählers wiederum eine höhere Einheit zum Nenner zu geben, deren Rang gleich der Hälfte dieser Decimalstellen ist, oder in der gefundenen Wurzel des Zählers eben so viele Stellen als Decimalstellen abzuschneiden, als Classen zu zwei in ihm anfänglich vorhanden waren. Z. B.

$$\sqrt{15{,}032} = \frac{\sqrt{150320}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{150320}}{100};$$

$$\sqrt{0{,}00351} = \frac{\sqrt{3510}}{\sqrt{1000000}} = \frac{\sqrt{3510}}{1000}.$$

§. 228.

Jede ganze Zahl kann als ein Decimalbruch mit willkührlich hohem Nenner ausgedrückt werden; nachdem ein Komma hinter sie gesetzt ist, darf man nämlich nur so viel Nullen als Decimalen folgen lassen, als der Rang des Nenners Einheiten enthalten soll.

Wenn daher die Quadratwurzel einer ganzen Zahl, welche kein vollständiges Quadrat ist, näher als vorhin in ganzen Zahlen, durch Hülfe eines Decimalbruchs, angegeben

werden soll, so hängt man nach einem hinter ihre niedrigste Ziffer gesetzten Komma so viele Paare Nullen, als Decimalstellen in der Wurzel verlangt werden. Sollte z. B. $\sqrt{12}$ näher als durch 3, etwa auf vier Decimalstellen bestimmt werden, so hat man:

$$\sqrt{12} = \sqrt{12,00000000} = \frac{\sqrt{1200000000}}{10000}$$

$$= \frac{34641}{10000} = 3,4641.$$

§. 229.

Jemehr Decimalstellen auf solche Art bestimmt werden, um desto näher muß man dem kommen, was der Irrational-Ausdruck andeutet. Denn ein größerer unächter Bruch giebt quadrirt etwas Größeres, als ein kleinerer; die größere Anzahl der Decimalstellen vergrößert den Bruch aber immer mehr, und man darf so viele Nullen-Paare der gegebenen Zahl anhängen, als man will, da durch das Komma der Werth derselben wieder hergestellt wird. — So bestätigt es sich also, daß man sich der Quadratwurzel einer Irrational-Zahl beliebig weit annähern kann. (Vergl. §. 212).

§. 230.

Auch bei einem Decimalbruche, dessen Zähler irrational ist, wird die Berechnung der Quadratwurzel durch Anhängen von Nullen fortgesetzt. Hierbei ist nichts weiter zu beobachten, da man sich hinter der letzten Decimalstelle eines Decimalbruchs jederzeit beliebig viele Nullen denken kann.

Wäre der Decimalbruch ein periodischer, so würden natürlich an den jedesmaligen Rest, anstatt zwei Nullen, zwei seiner Periode entsprechende Ziffern zu setzen seyn. Dies ist namentlich zu berücksichtigen, wenn man bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus einem gemeinen Bruche ihn erst in

einen Decimalbruch verwandelt, wie es in der Anwendung am bequemsten ist. Es sey z. B. $\sqrt{\frac{3}{5}}$ zu berechnen. Nach §. 216 könnte man setzen: $\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$. Bestimmt man nun $\sqrt{15}$ auf gewisse Decimalstellen, etwa $= 3{,}87298\ldots$, so muß dieser Bruch noch durch 5 dividirt werden, welches $\sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}77459\ldots$ giebt. Verwandelt man aber $\frac{3}{5}$ in einen Decimalbruch $= 0{,}6$ so hat man $\sqrt{0{,}6} = \frac{\sqrt{6000000000}}{100000}$ zu berechnen; und die Division der Größe $\sqrt{6000000000} = 77459$ durch die höhere Einheit 100000, geschieht sogleich durch das Abschneiden von 5 Decimalstellen. Hätte man $\sqrt{\frac{5}{6}}$ zu bestimmen, so ist $\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$ Hier würden demnach anstatt der Paare von Nullen zur weitern Fortsetzung des Bruchs immer zwei Dreien angehängt; und dadurch $\sqrt{\frac{5}{6}}$ z. B. auf 4 Decimalstellen, durch $\frac{\sqrt{83333333}}{10000} = 0{,}9128$ ausgedrückt werden.

Drittes Capitel.

Von den Gleichungen des zweiten Grades und ihrer Auflösung.

---

§. 231.

Die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades beruht insbesondere auf der Ausziehung der Quadratwurzel

aus einem Buchstaben-Ausdrucke, daher sie, als eine Anwendung der im vorigen Capitel angestellten Untersuchungen, hier Platz finden mag. Vollständiger kann indessen darüber erst in der höhern Algebra gehandelt werden.

Es wird nützlich seyn, bei dieser Gelegenheit einige allgemeine Erklärungen über Gleichungen höherer Grade mit einer unbekannten Größe voranzuschicken, und zu zeigen, in welche Formen dieselben gebracht werden können.

Gleichungen höherer Grade mit einer unbekannten Größe im Allgemeinen.

§. 232.

Die Gleichungen werden nach dem Grade der höchsten Potenz der in ihnen vorkommenden unbekannten Größe in Gleichungen des ersten, zweiten, dritten Grades u. s. w. eingetheilt.

Um den Grad einer Gleichung erkennen zu können, muß sie vorher dahin gebracht seyn, daß die unbekannte Größe in allen Gliedern derselben, in denen sie enthalten ist, nur als Factor steht, und die Gleichung selbst eine entwickelte Gestalt annimmt. Alsdann bestimmt der Grad der höchsten Potenz, worin die unbekannte Größe in einem oder mehreren Gliedern vorkommt, den Grad der Gleichung.

§. 233.

Damit nun aber irgend einer Gleichung die Form gegeben werde, welche zu jenem Zwecke, und zugleich auch dazu nöthig ist, ihre Auflösung vorzubereiten, so verfährt man mit ihr folgendermaßen:

1) Man schafft die Divisoren fort, welche die unbekannte Größe enthalten, indem man die Gleichung mit denselben oder mit ihrem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen multiplicirt.

2) Man stellt die Partialproducte dar, in welchen die

verschiedenen vorkommenden Dignitäten der unbekannten Größe als Factor stehen, indem man mit den mehrtheiligen Factoren solcher Glieder, worin die unbekannte Größe verwickelt ist, wirklich multiplicirt. Hierauf untersucht man noch

3) ob Glieder vorkommen, die der Größe nach gleich, dem Zeichen nach entgegengesetzt sind, und hebt dann solche gegen einander auf; oder ob etwa die unbekannte Größe in allen Gliedern als Factor steht, in welchem Falle man die Gleichung durch sie dividirt.

§. 234.

Die fernere Vorbereitung einer Gleichung zu ihrer Auflösung fordert das Ordnen derselben. Nachdem nämlich die Regeln des vorigen §. angewandt sind, vereinigt man durch Transposition alle Glieder, welche einerlei Potenz der unbekannten Größe enthalten, sondert sie darin als gemeinschaftlichen Factor ab, und stellt die nun entstehenden Glieder so zusammen, daß sie, nach den Graden der Potenzen der unbekannten Größe in natürlicher Ordnung abnehmend, auf einander folgen. Die ganz bekannten Glieder können dabei entweder als der Inbegriff desjenigen, was in der 0ten Dignität der unbekannten Größe multiplicirt ist (§. 190) auf dieselbe Seite der Gleichung zuletzt gesetzt werden, oder sie können die andere Seite derselben ausmachen. Bei der ersten Anordnung kommt auf dieser Seite Null zu stehen, und die Gleichung heißt auf Null gebracht.

Noch kann man zum Ordnen der Gleichung rechnen, daß das höchste Glied derselben (das, worin die höchste Potenz der unbekannten Größe vorkommt) allemal positiv gemacht wird, welches, wenn es nicht schon der Fall ist, durch Multiplication der Gleichung mit — 1 geschieht.

§. 235.

Solchergestalt kann durch Entwickeln und Ordnen jede Gleichung des ersten Grades auf die Form:

$$ax = b;$$

jede Gleichung des zweiten Grades auf die Form:

$$ax^2 + bx = c;$$

jede Gleichung des dritten Grades auf die Form:

$$ax^3 + bx^2 + cx = d,$$

u. s. w. gebracht werden, worin x die unbekannte Größe, a, b, c, d ganz beliebige bekannte Größen, oder den Inbegriff solcher bedeuten.

Beispiel. Es sey die Gleichung:

$$\frac{a}{x+b} - cx - n + \frac{d}{x} = p + qx$$

gegeben, so wird daraus durch Multiplication mit $x(x + b)$:

$$ax - cxx(x + b) - nx(x + b) + d(x + b)$$
$$= px(x + b) + qxx(x + b);$$

durch Auflösung der Klammer-Größen, und indem man von der Bezeichnung eines Products gleicher Factoren durch eine Potenz nach §. 177 Gebrauch macht:

$$ax - cx^3 - bcx^2 - nx^2 - nbx + dx + bd$$
$$= px^2 + pbx + qx^3 + qbx^2;$$

durch Transposition und Zusammenziehen:

$$-(c + q)x^3 - (bc + n + p + qb)x^2 + (a - nb$$
$$+ d - pb)x = -bd;$$

und endlich durch Multiplication mit -1:

$$(c + q)x^3 + (bc + n + p + qb)x^2 - (a - nb$$
$$+ d - pb)x = bd.$$

Die gegebene Gleichung ist also eine Gleichung des dritten Grades, und in der letzten Gestalt als eine entwickelte und nach x geordnete Gleichung dieses Grades dargestellt.

§. 236.

Die allgemeine Form, in welche eine Gleichung des ersten Grades gebracht werden kann, stimmt mit der überein,

welche für jede einfache Gleichung bewiesen ist (§. 158). Einfache Gleichungen sind also Gleichungen des ersten Grades.

Anmerk. Wiewohl einfache Gleichungen und Gleichungen des ersten Grades hinsichtlich der unbekannten Größe einerlei Form annehmen, und also darin übereinstimmen, daß in beiden die unbekannte Größe in allen Gliedern, in denen sie vorkommt, nur einmal als Factor steht, so könnte man sie doch wohl insofern unterscheiden, daß in einfachen Gleichungen nothwendig auch die mit bekannten Größen vorzunehmenden Operationen nur die vier Species der Arithmetik ausmachen müßten, während in den Gleichungen des ersten Grades die bekannten Größen unter sich noch auf andere Art verknüpft seyn dürften. Es ist indessen leicht zu begreifen, daß sich die Auflösung der Gleichungen in beiden Fällen nicht von einander unterscheidet, da sie nur das Trennen der unbekannten Größe aus ihren Verknüpfungen mit bekannten Größen zum Zwecke hat, und es dabei ganz gleichgültig ist, wie diese unter sich verbunden vorkommen. Z. B. die Auflösung der Gleichung

$$ax + b^2 = \sqrt{p}$$

fordert keine andere Regeln als die, welche für die Auflösung einfacher Gleichungen überhaupt vorgeschrieben sind; denn nur durch Transposition von b^2 und Division durch a, erhält man aus ihr

$$x = \frac{\sqrt{p} - b^2}{a}.$$

Um diesen Werth von x zu bestimmen, wird freilich die Ausführung von Operationen nöthig, von denen bei der Ableitung jener Regeln nicht die Rede seyn konnte.

§. 237.

Die Gleichungen höherer Grade werden in reine und unreine, und die letzten wieder in vollständige und unvollständige Gleichungen eingetheilt.

In einer reinen Gleichung steht bloß die unbekannte Größe in der Potenz, die dem Grade der Gleichung gemäß

ist; in einer **unreinen** Gleichung kommt sie auch in niederern Dignitäten vor. In diesem Falle kann die unbekannte Größe in **allen** niederern Dignitäten vorkommen, — dann heißt die Gleichung eine **vollständige** — oder sie kommt nicht in allen niederern Dignitäten vor, dann heißt die Gleichung eine **unvollständige**.

Anmerk. Die Auflösung reiner Gleichungen kommt besonders auf Wurzelausziehung zurück, und insoweit diese Operation auszuführen ist, wird auch der Werth der unbekannten Größe aus ihnen bestimmt werden können. Größere Schwierigkeiten treten bei der Auflösung unreiner, vollständiger und unvollständiger Gleichungen ein.

Auflösung reiner quadratischer Gleichungen.

§. 238.

Die Gleichungen des zweiten Grades werden auch **quadratische Gleichungen** genannt.

Wenn x wie bisher die unbekannte Größe und a und b bekannte Größen vorstellen, so ist die allgemeine Form einer reinen quadratischen Gleichung:

$$ax^2 = b;$$

auf diese Form kann jede Gleichung, wenn sie wirklich eine reine quadratische ist, durch Anwendung der Regeln der §§. 233. 234 jedesmal zurückgeführt werden.

Aus der Gleichung $ax^2 = b$, wird durch Division mit a.

$$x^2 = \frac{b}{a}.$$

Wenn man daher eine reine quadratische Gleichung, nachdem sie entwickelt und geordnet ist, durch den Factor, welcher mit dem Quadrate der unbekannten Größe multiplicirt ist, dividirt, so nimmt sie die Gestalt $x^2 = p$ an, worin p eine willkührliche bekannte Größe bedeutet.

§. 239.

Sind zwei Größen gleich, so müssen es auch ihre Quadratwurzeln seyn. Man darf mithin aus beiden Seiten einer Gleichung die Quadratwurzel ziehen, und wird dadurch wiederum Gleiches bekommen. Dieses auf die Gleichung $x^2 = p$ angewandt, giebt: $\sqrt{x^2} = \sqrt{p}$. Da aber die Quadratwurzel aus x^2, gleich x, sowohl positiv als negativ genommen werden kann, so muß dieses vor ihrem Werthe durch das doppelte Zeichen $\pm$ angedeutet werden, und so erhält man bei der Auflösung der Gleichung $x^2 = p$,

$$x = \pm \sqrt{p}.$$

§. 240.

Die unbekannte Größe einer reinen quadratischen Gleichung hat also immer zwei Werthe, welche der Größe nach gleich, dem Zeichen nach entgegengesetzt sind.

Ist die Größe p negativ, so sind beide Werthe der unbekannten Größe unmöglich; ist sie ein unvollständiges Quadrat, so sind beide Werthe irrational. Die unbekannte Größe kann im letzten Falle also nur annäherungsweise bestimmt werden.

Beispiele.

1) Es sey die Gleichung:

$$ax^2 - cx^2 + n = m + x^2$$

gegeben, so erscheint sie geordnet, so:

$$(a - c - 1)\, x^2 = m - n;$$

und durch Division mit $(a - c - 1)$ wird sie

$$x^2 = \frac{m - n}{a - c - 1}, \text{ mithin}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{m - n}{a - c - 1}}.$$

Will man den Nenner rational haben, so wird daraus

$$x = \pm \frac{\sqrt{(m - n)(a - c - 1)}}{a - c - 1} \text{ (§. 216).}$$

2) Es sey die gegebene Gleichung:

$$3x^2 - 5 = \frac{1}{2} x^2 + 13,$$

so wird aus ihr durch Ordnen und wirkliche Vereinigung der zusammen zu stellenden Glieder:

$$\frac{5}{2} x^2 = 18;$$

durch Division mit $\frac{5}{2}$:

$$x^2 = \frac{36}{5}, \text{ mithin}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{36}{5}} = \pm \frac{6}{\sqrt{5}},$$

oder indem der Nenner rational gemacht wird:

$$x = \pm \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Nun ist $\sqrt{5} = 2{,}236068 \ldots$ woraus auch $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ annäherungsweise bestimmt werden kann, und es findet sich dadurch

$$x = \pm 2{,}683261 \ldots$$

Auflösung unreiner quadratischer Gleichungen.

§. 241.

Jede Gleichung, wenn sie eine unreine quadratische ist, nimmt diese Gestalt an:

$$ax^2 + bx = c. \quad (\text{§. } 235).$$

Das höchste Glied (ax^2) kann alsdann durch Division der Gleichung mit seinem Coefficienten (a) jedesmal davon befreit werden; so entsteht:

$$x^2 + \frac{b}{a} x = \frac{c}{a}.$$

Indem daher den Regeln der §§. 233 und 234 als letzte noch die beigefügt wird: „man schaffe den Coefficienten des höchsten Gliedes der Gleichung fort“, ist man

man berechtigt, als allgemeine Form einer unreinen quadratischen Gleichung folgende aufzustellen:

$$x^2 + px = q,$$

worin x die unbekannte Größe, p und q gegebene, ganz beliebige Größen bedeuten.

§. 242.

Zur Auflösung der Gleichung $x^2 + px = q$, ist die Ausziehung der Quadratwurzel aus beiden Seiten derselben erforderlich; und diese Operation muß, damit die unbekannte Größe aus ihren Verknüpfungen mit den bekannten Größen getrennt werden kann, auf der linken Seite der Gleichung wirklich ausgeführt werden. Nun ist diese Seite $(x^2 + px)$ ein unvollständiges Quadrat (§. 219); da man aber auf beiden Seiten der Gleichung gleiche Größen hinzusetzen darf, so ist es möglich, sie zum vollständigen Quadrate zu ergänzen. Es frägt sich nur, was das ihr dazu Fehlende sey? Dies läßt sich leicht ausmitteln: man sehe das erste Glied x^2, als das Quadrat des ersten Theils einer gewissen zweitheiligen Größe an, so darf das zweite Glied px, indem es die Quadratwurzel des ersten Gliedes als Factor enthält, als doppeltes Product aus dem ersten in den zweiten Theil angenommen werden, wenn man nur diesen darnach einrichtet. Aus dem doppelten Producte einer Größe in eine andere, findet sich, wenn die eine dieser beiden gegeben ist, die andere durch Division desselben mit dem Doppelten der gegebenen. Oder der halbe Factor $\left(\frac{p}{2}\right)$ der Größe (px), welche mit der als ersten Theil der Wurzel angenommenen (x) multiplicirt ist, muß der zweite Theil der Wurzel seyn. Sein Quadrat $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ ist es mithin, was der linken Seite der Gleichung

zum vollständigen Quadrate fehlt. Man addire dies auf beiden Seiten der anfänglichen Gleichung, so wird aus ihr:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Aus beiden Seiten dieser Gleichung die Quadratwurzel gezogen, giebt

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \text{ (§. 220).}$$

Das bekannte Glied $\frac{p}{2}$, welches noch mit der unbekannten Größe verbunden ist, transponirend, erhält man:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Wäre in der anfänglichen Gleichung das zweite Glied negativ, so würde auch der zweite Theil der Quadratwurzel aus $x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2$, negativ (§. 219); es entstände mithin:

$$x - \frac{p}{2} = \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

$$\text{und } x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

§. 243.

Auf diese Art ist dargethan, daß man aus der Gleichung: $x^2 \mp px = q$, folgern darf:

$$x = \pm \frac{p}{2} \pm \sqrt{q \pm \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Die Form, in welcher hiernach der Werth der unbekannten Größe einer unreinen quadratischen Gleichung auftritt, läßt sich leicht in Worten aussprechen, und dadurch auf jede solche Gleichung, nachdem ihr die Gestalt: $x^2 \pm px = q$ gegeben ist, unmittelbar anwenden; nämlich so: die

unbekannte Größe ist gleich dem Entgegengesetzten des halben Coefficienten derselben im zweiten Gliede der Gleichung, vereinigt mit dem positiven oder negativen Werth der Quadratwurzel aus der ganz bekannten Größe, zu welcher das Quadrat jenes halben Coefficienten addirt ist.

§. 244.

Die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung zeigt, daß die unbekannte Größe derselben zwei Werthe hat, welche nur in dem Falle einander gleich werden, in welchem die Größe unter dem Wurzelzeichen aequal Null wird. Soll aber $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0$ seyn, so muß $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q$, d. h. das Quadrat des halben Coefficienten des zweiten Gliedes der Gleichung muß gleich der unbekannten Größe, und diese negativ seyn. Es ist leicht hieraus zu folgern, daß, wenn man unter diesen Umständen die bekannte Größe auch auf die linke Seite der Gleichung bringt, hier ein vollständiges Quadrat entsteht, welches gleich Null gesetzt ist. Nämlich, unter der Voraussetzung, daß $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q$ ist, wird aus der Gleichung

$x^2 + px = q$, die $x^2 + px = -\left(\frac{p}{2}\right)^2$, oder

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0.$$

Aus beiden Seiten die Quadratwurzel gezogen, erhält man:

$$x + \frac{p}{2} = 0, \text{ mithin } x = -\frac{p}{2}.$$

Da die Quadratwurzel auf der linken Seite auch negativ genommen werden darf, so konnte man auch setzen:

$-x - \frac{p}{2} = 0$; dies giebt aber, wie vorhin $x = -\frac{p}{2}$; beide Werthe der unbekannten Größe sind also in diesem Falle, der Größe und dem Zeichen nach, ganz dieselben.

§. 245.

In jedem andern Falle giebt die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung zwei der Größe nach ganz verschiedene Werthe der unbekannten Größe, indem das eine Mal zu einer und derselben Größe $\left(\frac{p}{2}\right)$ etwas addirt, und das andere Mal eben dieses davon subtrahirt werden soll. Diese Werthe können von folgender Beschaffenheit seyn:

1) Steht unter dem Wurzelzeichen eine negative Größe, so sind beide Werthe der unbekannten Größe imaginair. Dies wird der Fall, wenn die ganz bekannte Größe (q) negativ auf der rechten Seite der Gleichung steht, und das Quadrat des halben Coefficienten der unbekannten Größe im zweiten Gliede der linken Seite $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ kleiner als jene ist.

2) Ist die ganz bekannte Größe (q) positiv, oder wenn sie negativ ist, doch kleiner als das Quadrat des halben Coefficienten $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, so steht unter dem Wurzelzeichen eine positive Größe und beide Werthe der unbekannten Größe sind reell. In diesem Falle sind

3) beide Werthe der unbekannten Größe rational, wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat ist; oder sie sind

4) beide irrational wenn diese Größe kein vollständiges Quadrat ist.

§. 246.

Zur wirklichen Berechnung des Werths der unbekannten Größe, wird die Formel:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

bequemer ausgedrückt. Man vereinigt nämlich die Größe unter dem Wurzelzeichen und zieht aus dem gemeinschaftlichen Nenner 4 die Quadratwurzel wirklich aus, so entsteht:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q + p^2}}{2}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{4q + p^2}}{2}.$$

§. 247.

Wenn die Größen p und q Brüche sind, so erfordert die Vereinfachung des Werths von x noch besondere Aufmerksamkeit. Als allgemeine Regel kann man darüber die aufstellen, daß die Größe unter dem Wurzelzeichen allemal so reducirt werde, daß sie einen gemeinschaftlichen, rationalen Nenner habe.

Folgendes Beispiel gehört zu einem der zusammengesetztern hierher gehöriger Fälle, wenn man einfache Größen als Zähler und Nenner der vorkommenden Brüche beibehalten will.

Es sey die gegebene Gleichung:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{d};$$

die Auflösung derselben giebt:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{c}{d} + \frac{b^2}{4a^2}}.$$

Unter dem Wurzelzeichen $4a^2d^2$ zum gemeinschaftlichen Nenner gemacht, wird:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{4a^2cd + b^2d^2}{4a^2d^2}}, \text{ oder}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4a^2cd + b^2d^2}}{2ad}, \text{ oder auch}$$

$$x = \frac{-bd \pm \sqrt{4a^2cd + b^2d^2}}{2ad}.$$

§. 248.

Nach einer solchen Reduction des Werths der unbekannten Größe, kömmt die weitere Berechnung desselben auf die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer gewissen Größe an, welche, wie wir im vorhergehenden Capitel gesehen haben, aus Buchstaben-Größen selten, aus bestimmten positiven Zahlen, wenigstens annäheruhgsweise, jedesmal geschehen kann.

Beispiele.

1) Es sey die aufzulösende Gleichung:

$3x^2 = 19x - 26$

sie erscheint geordnet:

$3x^2 - 19x = - 26.$

Das höchste Glied durch Division der Gleichung mit 3 von seinem Coefficienten befreiet, giebt:

$$x^2 - \frac{19}{3} = - \frac{26}{3},$$

hieraus erhält man nach §. 243.

$$x = \frac{19}{6} \pm \sqrt{-\frac{26}{3} + \left(\frac{19}{6}\right)^2}, \text{ oder unter dem Wur-}$$

zelzeichen vereinigend:

$$x = \frac{19}{6} \pm \sqrt{\frac{-26 \cdot 12 + (19)^2}{36}}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{-312 + 361}}{6} \text{ d. h.}$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{19 \pm 7}{6};$$

mithin das Zeichen plus nehmend:

$$x = \frac{26}{6} = 4\tfrac{1}{3};$$

das Zeichen minus nehmend:

$$x = \frac{12}{6} = 2.$$

2) Es sey die aufzulösende Gleichung:

$$\frac{2x}{x-1} - 3 - \frac{1}{x} = \frac{15}{4x}.$$

Durch Multiplication mit $4x\,(x-1)$ wird aus ihr:

$8x^2 - 12x\,(x-1) - 4(x-1) = 15(x-1)$; entwickelt:

$$8x^2 - 12x^2 + 12x - 4x + 4 = 15x - 15;$$

geordnet:

$$4x^2 + 7x = 19;$$

durch Division mit 4:

$$x^2 + \frac{7}{4}x = \frac{19}{4};$$

aufgelöst:

$$x = -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{19}{4} + \left(\frac{7}{8}\right)^2};$$

reducirt:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{19 \,.\, 2 \,.\, 8 + 49}}{8}, \text{ d. h.}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{353}}{8}.$$

Nun ist $\sqrt{353} = 18{,}788 \ldots.$
mithin:

$$x = \frac{-7 + 18{,}788\ldots}{8} = \frac{11{,}788\ldots}{8} = 1{,}473\ldots.$$

oder

$$x = \frac{-7 - 18{,}788\ldots}{8} = \frac{-25{,}788\ldots}{8} = -3{,}223\ldots$$

Gleichungen des zweiten Grades mit mehreren unbekannten Größen.

§. 249.

Kommen in einer Gleichung mehrere unbekannte Größen

vor, so heißt sie vom zweiten Grade, wenn nach ihrer Entwickelung in einem oder mehreren Gliedern zwei unbekannte Factoren stehen. Z. B. die Gleichungen

$$ax^2 + cy = p \text{ und}$$
$$mxy + y = q$$

sind beide, wenn man x und y als unbekannte Größen annimmt, Gleichungen des zweiten Grades.

§. 250.

Es ist leicht einzusehen, daß sich die allgemeinen Regeln, welche für die Elimination der unbekannten Größen bei einfachen oder Gleichungen des ersten Grades (§. 171 und folgende) gegeben sind, auch auf Gleichungen des zweiten Grades anwenden lassen. Wenn daher eben so viele von einander unabhängige Gleichungen angenommen werden, als in ihnen verschiedene unbekannte Größen vorkommen, so läßt sich auch, wenn diese Gleichungen vom zweiten Grade sind, daraus eine herleiten, worin nur noch eine unbekannte Größe vorkömmt. Die Endgleichung wird alsdann aber in den wenigsten Fällen wieder vom zweiten, sondern von höherem Grade, und die Rechnungsoperationen, die nöthig sind, um zu ihr zu gelangen, werden gewöhnlich unsere gegenwärtigen Kenntnisse überschreiten. — Dies ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

§. 251.

Die allgemeinste Form einer Gleichung des zweiten Grades mit zwei unbekannten Größen (x, y) ist:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = f;$$

sie kann durch Entwickeln und Ordnen, wovon im Vorhergehenden schon oft Gebrauch gemacht ist, aus irgend einer Gleichung dieser Art hervorgebracht werden.

Es sey nun noch eine solche Gleichung, worin die Co=

efficienten a, b, c u. s. w. andere bekannte Größen, sind, gegeben, die allgemein so angedeutet werden mag:

$$a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d'x + e'y = f'.$$

Um alsdann eine der unbekannten Größen z. B. x zu eliminiren, ordne man beide Gleichungen nach dieser Größe, und befreie darauf in beiden das höchste Glied von seinem Coefficienten, so entstehen für sie die Formen:

$$x^2 + px = q \text{ und}$$
$$x^2 + p'x = q',$$

wobei in den Coefficienten p, p', q und q' die zweite unbekannte Größe y im Quadrate und in der ersten Potenz enthalten seyn wird. Indem man beide Gleichungen von einander subtrahirt, bekommt man $(p - p')\,x = q - q'$ und daraus

$$x = \frac{q - q'}{p - p'}.$$

Durch Substitution dieses Werths von x in eine der anfänglichen Gleichungen wird nun zwar die Größe x eliminirt, da aber das Quadrat davon vorkommt, so muß der Werth $\frac{q - q'}{p - p'}$, welcher selbst y^2 und y enthält, quadrirt werden, und es entstehen dadurch, so wie auch durch die Multiplication mit y, indem er in das Glied, welches xy als Factor enthält, für x gesetzt werden muß, höhere Potenzen dieser andern unbekannten Größe als die zweite, oder die neue Gleichung wird von höherem als vom zweiten Grade.

§. 252.

Hieraus folgt zugleich, daß, wenn noch mehrere Gleichungen und unbekannte Größen als zwei vorausgesetzt werden, die Elimination einer der unbekannten Größen aus

allen zwar, wie oben geschehen könnte; daß aber die dadurch entstehenden Gleichungen, eben weil sie von höheren Graden werden, die weitere Elimination zur Ableitung der Endgleichung sehr erschweren, und die Anfangsgründe der Algebra auf jeden Fall übersteigen.

Aus diesem Grunde müssen wir uns hier auf Gleichungen mit zwei unbekannten Größen, und dabei auf den Fall beschränken, in welchem die Elimination jeder unbekannten Größe aus denselben, wiederum auf Gleichungen führt, die den zweiten Grad nicht überschreiten.

§. 253.

Dieser Fall wird im Allgemeinen nur dann eintreten, wenn nur eine der beiden angenommenen Gleichungen vom zweiten Grade, die andere aber vom ersten Grade ist; die Aufgabe also Gleichungen von folgender allgemeiner Form in sich schließt:

1) $ax + by = c$;

2) $mx^2 + ny^2 + pxy + qx + ry = d$.

Denn, nimmt man aus der ersten den Werth von x und setzt ihn für diese unbekannte Größe in die zweite, so wird sie offenbar eine quadratische Gleichung im Betreff der zweiten unbekannten Größe y; und nimmt man zum zweiten Male den Werth von y aus der ersten Gleichung und substituirt diesen in die zweite, so wird sie ebenfalls eine quadratische Gleichung für die erste unbekannte Größe x.

In besondern Fällen können indessen die Gleichungen auch beide vom zweiten Grade seyn, und die Elimination der unbekannten Größen führt wieder auf eine solche Gleichung; sie machen dann eine Ausnahme von jener allgemeinen Bestimmung.

Z. B. Aus den Gleichungen:

$x^2 + y^2 = a$ und

$$x^2 - y^2 = b,$$

findet sich durch Addition derselben:

$$2x^2 = a + b, \text{ daher}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{a+b}{2}};$$

und durch Subtraction derselben:

$$2y^2 = a - b, \text{ daher}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

§. 254.

Bei der Bestimmung der beiden unbekannten Größen aus den im vorhergehenden §. erwähnten Gleichungen, wovon die eine vom ersten Grade seyn soll, ist zu bemerken: wenn die andere Gleichung nach dem Ordnen in mehr als einem Gliede zwei unbekannte Factoren enthält (z. B. außer x^2 auch y^2 oder xy oder beide), so muß man jedesmal die Elimination (wenigstens die der ersten unbekannten Größe) dadurch vornehmen, daß man aus der einfachen Gleichung den Werth der zu eliminirenden Größe nimmt, und diesen in die zweite Gleichung substituirt; wenn diese Gleichung aber nach dem Ordnen nur in einem Gliede zwei unbekannte Factoren (z. B. nur x^2 oder y^2 oder xy) enthält, so kann man oft auch, ohne auf hier nicht zu leistende Rechnungen zu stoßen, mit Vortheil die beiden andern Eliminations-Methoden des §. 171, besonders die dritte anwenden. Es versteht sich übrigens von selbst, daß dies in speciellen Fällen auch bei der ersten Annahme möglich seyn kann.

§. 255.

Für das Weitere hierüber mögen folgende Beispiele dienen.

I. Die gegebenen Gleichungen sollen

1) $2x + 5y = 12$ und

2) $x^2 - y^2 = 4$ seyn;

so ist aus der ersten

$$x = \frac{12 - 5y}{2},$$

$$\text{mithin } x^2 = \frac{144 - 120y + 25y^2}{4};$$

dieses in die zweite Gleichung substituirt und sie zugleich mit 4 multiplicirt, giebt:

$$144 - 120y + 25y^2 - 4y^2 = 16;$$

geordnet, wird daraus die Gleichung:

$$21y^2 - 120y = - 128,$$

woraus y nach bekannten Regeln gefunden werden kann. Den Werth von y könnte man alsdann in die erste Gleichung substituiren, und darauf aus ihr auch x bestimmen. Dieses setzt aber voraus, daß der Werth von y kein Irrational-Ausdruck oder keine imaginaire Größe wird, denn in solchem Falle führte die Substitution auf Rechnung mit Wurzelgrößen. Auch müßten nach und nach beide Werthe von y, welche die Auflösung der quadratischen Gleichung $21y^2 - 120y = - 128$ giebt, in die erste Gleichung substituirt werden, wodurch die beiden Werthe der andern unbekannten Größe x aus dieser Gleichung hervorgehen würden. Theils aber, um diese weitläufige Substitution, theils die in den meisten Fällen erforderlich werdende Rechnung mit Wurzelgrößen zu vermeiden, eliminirt man aus den anfänglichen Gleichungen, eben so wie vorhin x, jetzt auch y. So findet sich aus der ersten Gleichung

$$y = \frac{12 - 2x}{5},$$

$$\text{mithin } y^2 = \frac{144 - 48x + 4x^2}{25}.$$

Diesen Werth in die zweite Gleichung substituirt, und sie mit 25 multiplicirt, giebt:

$$25x^2 - 144 + 48x - 4x^2 = 100;$$

geordnet, entsteht daraus die Gleichung:

$$21x^2 + 48x = 244,$$

woraus x gefunden werden kann.

II. Es mögen die Gleichungen

1) $x - 3y = 5$ und

2) $2x^2 + y = 3$ gegeben seyn.

Durch Multiplication mit 3 wird aus der zweiten

$$6x^2 + 3y = 9;$$

diese zu der ersten addirt, giebt

$$6x^2 + x = 14.$$

Würden die aus dieser Gleichung gezogenen Werthe von x rational, so könnte man sie der Reihe nach in die erste Gleichung substituiren, und dadurch auch y sehr leicht bestimmen. Die Gleichung

$$6x^2 + x = 14$$

giebt aber:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{337}}{12}.$$

Da hier also x irrationale Werthe hat, so eliminire man zur Bestimmung von y aus den anfänglichen Gleichungen die Größe x, indem man die erste dieser Gleichungen im Betreff des x auflöst und dessen Werth in die zweite substituirt. Aus 1) findet sich:

$$x = 5 + 3y, \text{ mithin ist}$$

$$x^2 = 25 + 30y + 9y^2;$$

dies in 2) substituirt, giebt:

$$2(25 + 30y + 9y^2) + y = 3;$$

entwickelt und geordnet, wird daraus die Gleichung:

$$18y^2 + 61y = -47,$$

welche durch ihre Auflösung die Werthe von y ohne Schwierigkeiten geben wird.

Viertes Capitel.

Von der Erhebung zum Cubus und der Ausziehung der Cubicwurzel.

Erhebung zum Cubus im Allgemeinen und Beziehung des Cubus zu seiner Wurzel.

§. 256.

Die dritte Potenz einer Zahl wird auch ihr Cubus,

und diese Zahl dann (die Wurzel der dritten Potenz) die Cubicwurzel genannt.

Um eine Zahl zum Cubus zu erheben, zu cubiren, muß man sie also dreimal als Factor setzen (§. 177) z. B.

$$a^3 = a \cdot a \cdot a;$$
$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$$

Da das Quadrat einer Größe ein Product aus zwei gleichen Factoren ist, so kann der Cubus durch Multiplication des Quadrats mit seiner Wurzel gebildet werden. Z. B.

$$a^3 = a^2 \cdot a.$$

§. 257.

Die Größe einer ganzen Zahl wächst durch ihre Erhebung zum Cubus, und zwar noch mehr als durch das Quadriren derselben; denn das Quadrat abermals mit der Wurzel (mit einer ganzen Zahl) multiplicirt, giebt erst den Cubus. Schon die Quadrate zweier ungleicher Zahlen unterschieden sich an Größe mehr, als ihre Wurzeln von einander; um so mehr muß dies also bei ihren Cuben der Fall seyn.

§. 258.

Ein Product wird zum Cubus erhoben, indem man alle Factoren desselben cubirt, und wieder durch Multiplication verbindet.

Denn durch das dreimalige Setzen eines Products als Factor, erscheint jeder Factor desselben in dem Resultate dreimal als Factor, oder zum Cubus erhoben, wieder (§. 55.) Z. B.

$$(abc)^3 = abcabcabc = aaabbbccc = a^3b^3c^3.$$

§. 259.

Eben so ist es eine unmittelbare Anwendung der Regeln für die Multiplication von Brüchen in einander, welche zeigt, daß

der Cubus eines Bruchs gleich einem Bruche wird, dessen Zähler gleich dem Cubus seines Zählers, und dessen Nenner gleich dem Cubus seines Nenners ist.

Z. B. $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$.

§. 260.

Folgerungen aus diesem Satze sind:

1) Daß durch das Cubiren der ächte Bruch ein kleinerer ächter Bruch, der unächte ein größerer unächter Bruch wird (§. 257).

Ferner, indem man sich zugleich auf die über das Aufgehen einer Division bewiesenen Sätze stützt,

2) daß, wenn der Bruch auf seinen kleinsten Ausdruck gebracht ist, auch sein Cubus ein Bruch ist, welcher im Zähler und Nenner keine gemeinschaftliche Factoren enthält;

3) daß der Cubus eines unächten Bruchs nie einer ganzen Zahl gleich werden kann, wenn er selbst ein eigentlicher Bruch ist.

§. 261.

Das Zeichen des Cubus ist mit dem seiner Wurzel übereinstimmend, d. h. der Cubus wird positiv oder negativ, je nachdem es die Wurzel ist. Denn das Quadrat einer Größe war immer positiv (§. 198); da nun der Cubus aus dem Quadrate durch Multiplication desselben mit seiner Wurzel entsteht, so ist es das Zeichen der letztern, welches diesem Producte beigelegt werden muß. Z. B.

$$(+a)^3 = (+a^2) \cdot a = +a^3;$$
$$(-a)^3 = (+a^2) \cdot (-a) = -a^3.$$

§. 262.

Die Beziehung des Cubus einer zweitheiligen Größe zu

seiner Wurzel, ergiebt sich aus der Betrachtung der durch unmittelbare Berechnung gefundenen Formel für den Cubus einer allgemein bezeichneten zweitheiligen Größe. Es sey diese $a + b$, so ist nach §. 256

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) =$$
$$(a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Der entwickelte Cubus von $a + b$ zeigt also, daß der Cubus einer zweitheiligen Größe aus der Vereinigung von vier Partialproducten besteht, welche sind:

der Cubus des ersten Theils, das dreifache Product des Quadrats des ersten in den zweiten Theil, das dreifache Product des ersten in das Quadrat des zweiten Theils, und der Cubus des zweiten Theils.

Die Regel für das Cubiren einer zweitheiligen Größe nach jener Formel, ist hierdurch hinlänglich bezeichnet.

§. 263.

Um auch eine beliebige vieltheilige Größe nach der abgeleiteten Formel des vorigen §. zu cubiren, darf man nur mehrere Theile derselben als einen Theil annehmen, wodurch jede vieltheilige Größe die Form einer zweitheiligen erhält. Das Verfahren beim Cubiren selbst ist alsdann folgendes:

Nachdem der Cubus der ersten beiden Theile der Wurzel berechnet ist, macht der dritte Theil derselben den zweiten aus; und nun fügt man jenem Cubus die vorgeschriebenen drei Partialproducte bei, in welchen der Inbegriff der beiden ersten Theile als erster Theil der Wurzel erscheint. Hierdurch ist der Cubus der drei ersten Theile der Wurzel zusammengenommen dargestellt; ihr vierter Theil stellt jetzt den zweiten Theil vor, und man verfährt aufs Neue wie vorhin, indem man den Inbegriff der drei ersten Theile der Wurzel als einen Theil ansieht. Solchergestalt schreitet die Berech-

nung

nung fort, bis man endlich den Inbegriff aller Theile außer dem letzten, als den ersten, und den letzten als den zweiten Theil der Wurzel ansehen konnte, und dem gemäß die letzten Partialproducte dem vorhergehenden Cubus hinzugesetzt hat.

Beispiele.

$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3$;

$(a+b+c+d)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2 d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$.

Die Entwickelung der hier noch vorkommenden Klammer-Größen kann, wenn sie gefordert wird, ohne Schwierigkeit geschehen.

§. 264.

Sind unter den Theilen einer zu cubirenden Größe, negative, so werden die Cuben solcher Theile auch negativ; die Zeichen der übrigen Partialproducte, welche den Cubus der vieltheiligen Größe ausmachen, werden nach bekannten Regeln bestimmt; sie können positiv oder negativ werden, je nachdem eine gerade oder ungerade Anzahl negativer Factoren in dem Partialproducte vorkommt.

Beispiel.

$(a-b-c)^3 = (a-b)^3 - 3(a-b)^2 c + 3(a-b)c^2 - c^3$;
entwickelt,

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3a^2c + 6abc - 3b^2c + 3ac^2 - 3bc^2 - c^3$.

§. 265.

Als Beispiele über das Cubiren zusammengesetzter algebraischer Größen, deren Theile Producte oder Brüche sind, mögen folgende beiden dienen.

1) $\left(a + \frac{bc}{m}\right)^3 = a^3 + \frac{3a^2bc}{m} + \frac{3ab^2c^2}{m^2} + \frac{b^3c^3}{m^3}$.

2) $(1 - \frac{1}{2}n + pq)^3 = 1 - \frac{3n}{2} + \frac{3n^2}{4} - \frac{n^3}{8} + 3pq - 3npq + \frac{3n^2pq}{4} + 3p^2q^2 - \frac{3np^2q^2}{2} + p^3q^3$.

Anwendung der Regeln des Cubirens auf vielziffrige Zahlen des decadischen Zahlensystems.

§. 266.

Die Cuben der einfachen Zahlen sind, durch unmittelbare Multiplication berechnet, in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Wurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Man ersieht daraus, daß der Cubus einer einfachen Zahl höchstens dreiziffrig werden kann; erst für die niedrigste zweiziffrige Zahl 10 entsteht ein vierziffriger Cubus 1000.

§. 267.

Höhere Einheiten zum Cubus erhoben, geben wiederum höhere Einheiten, deren Rang das Dreifache des Ranges der Wurzel ist. Denn das Quadrat einer höhern Einheit ist eine solche von doppelt so hohem Range als dem der Wurzel; beim Cubiren einer höhern Einheit muß aber das Quadrat derselben mit der Wurzel multiplicirt werden, welches durch Addition der Ränge beider geschieht (§. 59); es entsteht mithin eine höhere Einheit vom dreifachen Range der Wurzel.

§. 268.

Soll eine beliebige vielziffrige Zahl nicht durch unmittelbare Multiplication, sondern nach den Regeln der §§. 262 263 dadurch cubirt werden, daß man ihre von der Linken zur Rechten auf einander folgenden einzelnen Ziffern als ersten, zweiten, dritten Theil u. s. w. einer Größe ansieht, so ist noch die Rangfolge der dabei zu bildenden Partialproducte zu berücksichtigen. Diese ist nämlich so zu bestimmen,

daß jedes folgende Partialproduct einen um eins niedrigern Rang bekommt, als das nächst vorhergehende, denn die Ansicht der Partialproducte:

aaa, 3aab, 3abb, bbb

worin a eine Ziffer von gewissem Range, b eine im Range um eins niedrigere Ziffer; oder auch a eine aus mehreren Ziffern bestehende Zahl und b eine Ziffer bedeuten soll, deren Rang um eins geringer als die niedrigste Ziffer der Größe a ist — ergiebt, daß in jedes derselben ein Factor eintritt, dessen Rang um eins niedriger wird, als der Rang eines Factors im nächstvorhergehenden, während die Ränge der übrigen Factoren dieser beiden Partialproducte übereinstimmen. Die Factoren des Grades Null kommen dabei natürlich nicht in Betracht, da sie den Rang der mit ihnen zu multiplicirenden Ziffern nicht ändern.

Bei der Berechnung des Cubus einer vielziffrigen Zahl, bei der man die Ziffern als einzelne Theile betrachtet, werden aus diesem Grunde die einzelnen Producte, welche die allgemeine Formel für den Cubus einer vieltheiligen Größe giebt, zur Vereinigung so unter einander gestellt, daß jedes folgende mit der niedrigsten Ziffer um eine Stelle weiter zur Rechten hinabreicht.

Beispiel. Es sey der Cubus der Zahl 246 zu berechnen, so erhält man mit beigesetztem Schema folgende Partialproducte:

2^3	$= 8$	nämlich	a^3
$3(2)^2 4$	$= 48$	"	$3a^2b$
$3 \cdot 2 \cdot (4)^2$	$= 96$	"	$3ab^2$
4^3	$= 64$	"	b^3
$3 \cdot (24)^2 6$	$= 10368$	"	$3(a+b)^2c$
$3 \cdot 24 \cdot (6)^2$	$= 2592$	"	$3(a+b)c^2$
6^3	$= 216$	"	c^3
$(246)^3$	$= 14886936$	"	$(a+b+c)^3$

§. 269.

Im vollständigen Cubus einer vielziffrigen Zahl stehen die Cuben der einzelnen Ziffern der Wurzeln so, daß sie mit ihrer niedrigsten Ziffer jedesmal in Stellen, deren Rang durch drei theilbar ist, hinabreichen. Denn zwischen den Cuben der einzelnen Ziffern liegen immer zwei andere Partialproducte, und jedes ward beim Cubiren mit seiner niedrigsten Ziffer um eine Stelle weiter zur Rechten gerückt, mit dem Cubus der letzten Ziffer aber schloß die Berechnung. Dieser steht also mit seiner niedrigsten Ziffer in der Stelle des Ranges Null, der Cubus der ihr vorhergehenden Ziffer mit seiner niedrigsten Ziffer in der Stelle des Ranges drei u. s. w., so daß der Cubus der höchsten Ziffer der Wurzel mit seiner niedrigsten Ziffer in der Stelle des Ranges steht, welcher gleich dem Dreifachen ihres Ranges ist. Ist z. B. die höchste Ziffer der Wurzel vom vierten Range, so steht die niedrigste Ziffer ihres Cubus in der Stelle der zwölften Ordnung des vollständigen Cubus der Wurzel.

§. 270.

Der Cubus einer Zahl enthält eben so viele Stellen, deren Rang durch 3 theilbar ist, als Ziffern in der Wurzel liegen.

Um diesen Satz zu beweisen, kommt es nur darauf an, zu zeigen, daß durch die Addition der für den Cubus einer Zahl berechneten Partialproducte nicht noch mehrere Stellen, deren Rang sich durch 3 theilen läßt, erscheinen können, als die Anzahl der Ziffern in der Wurzel beträgt; denn, daß wenigstens so viele Stellen von dieser Eigenschaft vorkommen, ergiebt schon der vorige §., wenn man nur dabei bemerkt, daß beim Cubiren von jeder Ziffer der Wurzel nach und nach der Cubus genommen wird. Nun ist aber auch gezeigt, daß der Cubus der höchsten Ziffer der Wurzel in ih-

rem vollständigen Cubus in der Stelle endigt, deren Rang gleich dem Dreifachen des Ranges dieser Ziffer ist; wenn also bewiesen wird, daß im vollständigen Cubus nicht noch drei höhere Stellen als die erwähnte vorkommen können, so ist das noch Darzuthuende zugleich bewiesen, — und dies kann folgendermaßen geschehen: man nehme diejenige höhere Einheit, welche die als Wurzel gegebene Zahl zunächst überschreitet, mithin im Range um eins höher als die höchste Ziffer dieser ist, so wird ihr Cubus eine höhere Einheit, dreimal so hoch im Range, als sie selbst, und dabei die kleinste Zahl dieser Ordnung seyn; dieser Cubus ist nun auch um drei höher im Range, als die Stelle, in welcher der Cubus der höchsten Ziffer der in Frage stehenden Zahl endigt; in dem vollständigen Cubus der letztern können mithin, da er kleiner, als der Cubus der angenommenen höhern Einheit ausfallen muß (§. 257), keine drei höhere Stellen auf jene mehr folgen.

Ausziehung der Cubicwurzel im Allgemeinen.

§. 271.

Die Wurzel des dritten Grades oder die Cubicwurzel aus einer Zahl ziehen, heißt: sie in drei gleiche Factoren zu zerlegen; oder auch: eine Zahl suchen, welche, dreimal als Factor gesetzt, ein Product hervorbringt, welches der gegebenen Zahl gleich ist. Die Operation wird zufolge §. 178 durch das Zeichen $\sqrt[3]{}$ angedeutet.

§. 272.

Erscheint eine Zahl als ein Product aus drei gleichen Factoren, als ein vollständiger Cubus, so wird sich aus ihr auch die Cubicwurzel wirklich ausziehen lassen. Wenn in diesem Falle die Zahl so gegeben ist, daß ihre Erhebung zum Cubus nur angedeutet ist, so wird ihre Cubicwurzel zugleich gegeben; wie z. B.

$$\sqrt[3]{a^3} = a;\ \sqrt[3]{(528)^3} = 528 \text{ ist.}$$

In jedem andern Falle kommt es, um zu untersuchen, ob eine Größe ein vollständiger Cubus sey, darauf an, die bekannten Beziehungen eines solchen zu seiner Wurzel zu Hülfe zu nehmen. Je zusammengesetzter eine Größe ist, desto weitläufiger fällt diese Untersuchung aus.

§. 273.

Im §. 257 ist gezeigt, daß die Cuben zweier an Größe verschiedener Zahlen noch mehr, als ihre Wurzeln von einander abstehen. Zwei um eine Einheit verschiedene ganze Zahlen geben daher, zum Cubus erhoben, solche, zwischen denen mehrere ganze Zahlen liegen, die nicht durch Cubiren entstanden seyn können; weil, wenn dies bei einer von ihnen der Fall wäre, ihre Wurzel eine zwischen jenen angenommenen beiden Zahlen liegende ganze Zahl seyn müßte, diese aber keine ganze Zahl mehr zwischen sich enthalten, und weil kein Bruch dafür angenommen werden darf, indem dessen Cubus immer wieder ein Bruch wird (§. 260).

Bei der Ausziehung der Cubicwurzel werden aus diesem Grunde, noch öfterer als bei der Ausziehung der Quadratwurzel, Irrationalitäten vorkommen. Aber auch hier kann der Forderung eines Irrational-Ausdrucks, wie z. B. $\sqrt[3]{256}$, annähernd ein Genüge geleistet werden; oder, die Grenzen, welche für die Cubicwurzel desselben, wenn sie existirte, gesetzt sind, können immer enger bestimmt werden, so daß dadurch eine Zahl gefunden wird, die immer mehr erfüllt, was von jener gefordert wird. (Vergl. §. 283).

§. 274.

Das Zeichen der Cubicwurzel bestimmt sich nach §. 261; es muß dem der Größe, woraus die Cubicwurzel gezogen wird, gleich seyn.

Die Zweideutigkeit, welche die Quadratwurzel-Ausziehung immer, und die Unmöglichkeit, welche die Ausführung ihrer Operation bei negativen Zahlen herbeiführte, tritt also bei Ausziehung der Cubicwurzel nicht ein. Es ist

$$\sqrt[3]{a^3} = a,$$
$$\sqrt[3]{-a^3} = -a.$$

§. 275.

Aus einem Producte wird die Cubicwurzel gezogen, indem man die Cubicwurzeln seiner Factoren wieder als Factoren verbindet. Z. B.

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}.$$

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus §. 258.

§. 276.

Die Cubicwurzel eines Bruchs ist ein ähnlicher Bruch (ächt oder unächt wie dieser), in welchem Zähler und Nenner die Cubicwurzeln aus Zähler und Nenner des gegebenen sind. Z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Auch der Beweis dieses Satzes beruht lediglich auf den Regeln des Cubirens und zwar auf denen der §§. 259. 260.

Die Ausziehung der Cubicwurzel aus ganzen Zahlen giebt also zugleich das Mittel, diese Operation an einem Bruche vorzunehmen.

§. 277.

Will man bei der Ausziehung der Cubicwurzel aus einem Bruche die Rationalität des Zählers oder Nenners bewirken, so müssen Zähler und Nenner desselben mit dem Quadrate von jenem oder diesem multiplicirt werden; denn der vollständige Cubus entsteht durch die Multiplication der Wurzel mit ihrem Quadrate. Es ist daher:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{a^2b}} = \frac{a}{\sqrt[3]{a^2b}}$$; oder auch

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}.$$

Diese Methode ist ganz allgemein; bei Brüchen von besonderer Beschaffenheit, lassen sich aber für eben diesen Zweck noch andere auffinden.

§. 278.

Um aus einer aus Theilen bestehenden Größe die Cubicwurzel ziehen zu können, muß sie, wenn die Vereinigung ihrer Theile nur angedeutet ist, wie bei Buchstabengrößen, so beschaffen seyn, daß sie sich unter die allgemeine Form des Cubus einer vieltheiligen Größe bringen läßt, welche in den §§. 262 und folgenden dargethan ist. Ist sie nicht so beschaffen, so kann erst durch Hülfe höherer Rechnungsarten ihre Cubicwurzel annäherungsweise bestimmt werden; oder man muß sich alsdann auf die Andeutung der Wurzelausziehung beschränken.

Anmerkung. Es ist leicht durch Hülfe der Formel für den Cubus einer zweitheiligen Größe die Cubicwurzel aus einer viertheiligen Buchstabengröße zu ziehen, oder, wenn sie irrational ist, das zu bestimmen, was ihr zum vollständigen Cubus einer gewissen zweitheiligen Wurzel fehlt. Auch kann eben dieses bei dreitheiligen Wurzeln u. s. w. geleistet werden. Das Verfahren und das Schema für die Berechnung ist dem bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus dergleichen Größen ähnlich. Die Untersuchungen hierüber haben indessen für die Praxis wenig Nutzen.

Ausziehung der Cubicwurzel aus bestimmten Zahlen.

§. 279.

Eine beliebig angenommene Zahl wird in den wenigsten Fällen so beschaffen seyn, daß sie eine Cubicwurzel hat (§.

273). Es soll daher zunächst untersucht werden, welches bei einer gegebenen ganzen Zahl diejenige ist, deren Cubus ihr am nächsten kommt, so daß er sie aber nicht überschreitet, d. h. welches die niedrigste Grenze ihrer Cubicwurzel in ganzen Zahlen ist. Dadurch wird es alsdann auch leicht seyn, den Bruch zu bestimmen, der dieser Zahl noch hinzuzufügen ist, um die Cubicwurzel einer gegebenen näher auszudrücken.

Ist aber eine Zahl ein vollständiger Cubus, so wird ihre Wurzel durch dies Verfahren gleichzeitig entdeckt.

§. 280.

Die Cuben der einfachen Zahlen liegen zwischen 1 und 1000; die Cubicwurzel jeder Zahl, welche höchstens dreiziffrig ist, kann mithin in dem angenommenen Sinne durch bloße Ansicht der Wurzel-Tafel des §. 266 bestimmt werden. So liegt z. B. $\sqrt[3]{568}$ zwischen 8 und 9, oder 8 ist ihre niedrigste Grenze in ganzen Zahlen.

Enthält aber eine Zahl mehr als drei Ziffern, so wendet man folgende Regeln, — die sich auf die im Vorhergehenden abgeleiteten Beziehungen des vollständigen Cubus einer vielziffrigen Zahl zu seiner Wurzel stützen, — zur Ausziehung der Cubicwurzel aus derselben an.

§. 281.

1) Die gegebene Zahl wird in Classen zu drei Ziffern von der Rechten zur Linken eingetheilt. In der höchsten Classe (der ersten zur Linken) können daher auch zwei oder eine Ziffer enthalten seyn.

Dadurch erhält man in der niedrigsten Ziffer jeder Classe alle in der Zahl vorhandenen Stellen, deren Rang durch 3 theilbar ist, und aus eben so vielen Ziffern wird die gesuchte Wurzel bestehen (§. 270).

2) Man bestimmt als erste oder höchste Ziffer der Wurzel diejenige einfache Zahl, deren Cubus der höchsten Classe am nächsten kommt, jedoch so, daß er nicht mehr beträgt als sie; und zieht ihren Cubus davon ab.

Denn bis in die höchste Classe hinab reichte der Cubus der höchsten Ziffer der Wurzel (§. 269).

3) Zu dem etwaigen Reste setzt man als folgende Ziffern die zweite Classe, und dividirt den Theil der dadurch entstehenden Zahl, welcher aus diesem Reste und der höchsten Ziffer der zweiten Classe besteht, durch das Quadrat des ersten, nach Nr. 2 bestimmten, Theils der Wurzel; diesen Quotienten nimmt man als die zweite Ziffer der Wurzel an. Denn bis in die erste Stelle nach der höchsten, deren Rang durch 3 theilbar ist, reichte im vollständigen Cubus einer Zahl das Partialproduct, welches das dreifache Quadrat des ersten, multiplicirt in den zweiten Theil der Wurzel, ausmacht. Auch muß der Quotient, welcher durch die Division des Products aus dem dreifachen Quadrate einer Größe in eine andere durch das dreifache Quadrat der ersten entsteht, diese andere geben ($3a^2b : 3a^2 = b$).

Der dividirte Theil kann aber mehr als das Product aus dem dreifachen Quadrate des ersten Theils in den zweiten Theil der Wurzel enthalten, weil in ihn Einheiten von den folgenden beim Cubiren berechneten Partialproducten übergegangen seyn können; jener Quotient kann also auch größer als der zweite Theil der Wurzel seyn. Um ihn daher zu prüfen, ob er den als letzterer zu erfüllenden Bedingungen ein Genüge leistet, berechnet man

4) das dreifache Product des Quadrats des ersten Theils in den als zweiten Theil der Wurzel angenommenen Quotienten, das dreifache Product aus dem Quadrate desselben in den ersten Theil und den Cubus von jenem; setzt diese drei

Partialproducte eben so, wie es beim Cubiren geschah, nämlich das erste mit der niedrigsten Ziffer unter die höchste der zweiten Classe der anfänglichen Zahl, und jedes folgende um eine Stelle weiter zur Rechten, so daß das letzte mit seiner niedrigsten Ziffer unter die niedrigste dieser Classe zu stehen kommt, und addirt sie in dieser Ordnung. Alsdann darf ihre Summe die Zahl, welche nach Nr. 3 aus dem ersten Reste und der zweiten Classe besteht, nicht übersteigen. Denn diese Zahl enthält jene, aus dem ersten und zweiten Theil der Wurzel gebildeten, drei Partialproducte (268).

5) Ist aber diese Summe höher als die erwähnte Zahl, so verringert man die als zweite Ziffer der Wurzel angenommene Zahl, jedoch nur nach und nach um eine Einheit, damit ihr höchster Werth nicht verfehlt werde.

6) Man subtrahirt von jener Zahl die Summe der drei Partialproducte, wenn sie nun der geforderten Bedingung entspricht; setzt zu dem etwaigen Reste die nächste Classe, wenn noch eine vorhanden ist, und verfährt zur Bestimmung des dritten Theils der Wurzel von Nr. 3. an aufs Neue, indem man den Inbegriff der beiden ersten schon bestimmten Theile der Wurzel als ihren ersten Theil ansieht.

Auf diese Art fährt man fort, bis alle Ziffern der Wurzel, welche die Anzahl der Classen vorschreibt, bestimmt sind.

Bleibt zuletzt kein Rest, so ist die gegebene Zahl eine Cubiczahl und ihre Wurzel genau bestimmt; bleibt aber ein Rest, so hat man in der Wurzel die Zahl gefunden, welche die größte ist, deren Cubus sich noch von der gegebenen abziehen lassen, und dann eben diesen Rest geben würde.

Folgende Beispiele zeigen das bei der Cubicwurzel-Ausziehung gebräuchliche Rechnungs-Schema. Die vorkommenden Partialproducte sind durch nebengesetzte allgemeine An-

deutungen bemerklich gemacht, wobei a, b, c die ersten, zweiten, dritten Theile der Wurzel vorstellen. Die Divisoren zur Bestimmung des zweiten und dritten Theils der Wurzel sind in Klammern geschlossen.

1stes Beispiel.

$\sqrt[3]{19|683} = 27$

a^3 ...	8
	11683
$(3a^2)$ ..	(12)
$3a^2b$ ...	84
$3ab^2$ ..	294
b^3 ..	343
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ..	11683
Rest	0

Die Cubicwurzel aus 19683 ist also genau gleich 27.

2tes Beispiel.

$\sqrt[3]{2|034|006} = 126$

a^3 ...	1
	1034
$(3a^2)$ ..	(3)
$3a^2b$ ..	6
$3ab^2$ ..	12
b^3 ..	8
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ...	728
	306006
$(3(a+b)^2)$ ..	(432)
$3(a+b)^2c$ ..	2592
$3(a+b)c^2$ ..	1296
c^3 ..	216
$3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$ ...	272376
Rest	33630

Die Zahl 2034006 ist also keine Cubiczahl; 126 ist diejenige Zahl, deren Cubus von 2034006 abgezogen, einen Rest von 33630 giebt, und der Cubus von 127 würde schon die gegebene Zahl übertreffen.

§. 282.

Um bei der Ausziehung der Cubicwurzel aus einem

Decimalbruche den Nenner desselben rational und zugleich wieder als eine höhere Einheit darzustellen, ist nur erforderlich, ihn zu einer höhern Einheit von einem durch 3 theilbaren Rang zu machen. Denn höhere Einheiten zum Cubus erhoben, gaben höhere Einheiten von dreifachem Range der ihrigen (§. 267). Umgekehrt wird also die Cubicwurzel aus einer höhern Einheit, deren Rang durch 3 theilbar ist, eine höhere Einheit seyn, deren Rang aus dem ihrigen durch Division mit 3 entsteht.

Ist demnach der Nenner eines Decimalbruchs nicht von der Beschaffenheit, daß sein Rang durch 3 theilbar ist, so muß man dies durch Anhängen von Nullen hinter die Decimalstellen, welches jederzeit geschehen darf, bewirken. Da nun die Cubicwurzel des Zählers durch die des Nenners dividirt werden muß, um die Cubicwurzel des Bruchs darzustellen (§. 276), so folgt, daß man bei einem solchen Decimalbruche, der Cubicwurzel seines Zählers eine höhere Einheit zum Nenner zu geben hat, deren Rang dreifach niedriger als der Rang seines Nenners ist; oder, daß bei Ausziehung der Cubicwurzel aus einem Decimalbruche, dieser, nachdem man die Anzahl seiner Decimalstellen so eingerichtet hat, daß sie durch 3 theilbar ist, als eine ganze Zahl betrachtet werden darf, das Komma in seiner Wurzel demnächst aber so bestimmt werden muß, daß für jede Classe von Decimalstellen die Wurzel eine Decimalstelle erhält. Z. B.

$$\sqrt[3]{5,389} = \sqrt[3]{\frac{5389}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{5389}}{10};$$

$$\sqrt[3]{0,1645} = \sqrt[3]{\frac{164500}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{164500}}{100}.$$

§. 283.

Da jede ganze Zahl als ein Decimalbruch von beliebig

hohem Nenner geschrieben werden kann, so ergiebt sich aus dem vorigen §. zugleich, wie man zu verfahren hat, um die Cubicwurzel aus einem unvollständigen Cubus durch Hülfe eines Decimalbruchs näher als in ganzen Zahlen anzugeben. Man hängt nämlich dem Reste, welcher bei der Bestimmung der letzten Ziffer der Wurzel (der Einer) bleibt, so viel mal drei Nullen an, als man Decimalstellen in der Wurzel verlangt. Dadurch kann man offenbar eine Zahl gefunden werden, deren Cubus sich immer weniger von einer gegebenen unterscheidet (Vergl. §§. 273. 279). So ist z. B.

$$\sqrt[3]{256} = \sqrt[3]{256{,}000000000} = \frac{\sqrt[3]{256000000000}}{1000}$$

$$= \frac{6349\ \ldots}{1000} = 6{,}349\ \ldots$$

§. 284.

Auf gleiche Art wird die Cubicwurzel aus einem Decimalbruche dadurch immer genauer gefunden, daß man an den, bei der Bestimmung der letzten Ziffer der Wurzel seines Zählers, etwa bleibenden Rest jedesmal drei Nullen hängt. Bei einem periodischen Decimalbruche werden, anstatt Nullen, die seiner Periode entsprechenden Ziffern dazu genommen.

Wie die Cubicwurzel eines gemeinen Bruchs durch Verwandlung desselben in einen Decimalbruch gefunden wird, ergiebt sich hieraus von selbst.

Fünftes Capitel.

Von der Erhebung zur Potenz und Ausziehung der Wurzeln im Allgemeinen.

---

§. 285.

Die Untersuchungen über Potenziirung und Wurzel-Ausziehung dürfen nicht mit denen über Erhebung zur zweiten

und dritten Potenz, und Ausziehung der Wurzeln dieser Grade geschlossen werden; denn wir müssen im Stande seyn, jede gegebene Größe zu einer beliebig hohen Potenz zu erheben, und die Wurzel jedes Grades aus einer solchen zu ziehen, wenigstens insoweit, als die Natur der letzten Operation ihre Ausführung überhaupt möglich macht.

Aber dadurch, daß man den im Vorhergehenden betretenen Weg weiter verfolgte und auf eben die Weise, wie die Eigenschaften der Quadrat- und Cubic-Zahlen, und die ihrer Wurzeln abgeleitet sind, auch die der vierten, fünften, sechsten und immer höher werdenden Potenzen und ihrer Wurzeln aufsuchte, würde man nie zu einem allgemeinen Resultate gelangen. Daher kommt es vielmehr darauf an, die Potenz eines ganz unbestimmten Grades von einer beliebigen Zahl darzustellen, und die Wurzel eines solchen Grades aus ihr zu ziehen; denn alsdann ist diese Aufgabe für jeden Zahlenwerth gelöst, der diesem Grade beigelegt werden möchte, indem man nur die bestimmte Zahl für ihn in die Form substituiren darf, welche jene Potenz oder Wurzel bewiesener Maßen annimmt.

§. 286.

Die nachfolgenden Sätze enthalten die Auflösung dieses Problems bei einfachen Größen, sie mögen positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen seyn, oder auch als aus Factoren bestehend erscheinen. Wir werden darin nämlich die gegenseitigen Beziehungen der Potenzen und Wurzeln beliebig hoher Grade dieser Größen ableiten; wodurch alle die über ihre zweiten und dritten Potenzen im Vorhergehenden aufgestellten Sätze, nur zur Allgemeinheit erhoben, wieder erscheinen.

Was aber zusammengesetzte (aus Theilen bestehende) Größen betrifft, so kann die Ausführung der Potenziirung

und Wurzelausziehung bei ihnen erst in der höhern Arithmetik allgemein dargestellt werden.

Erhebung zur Potenz.

§. 287.

Ist der Exponent einer Potenz eine gerade Zahl, so wird sie jedesmal positiv, die Wurzel mag positiv oder negativ seyn.

Es ist: $(\pm a)^{2n} = + a^{2n}$.

Zum Beweise dieses Satzes ist nur nöthig, zu zeigen, daß auch eine gerade Anzahl negativer Factoren ein positives Product hervorbringt; denn, daß lauter positive Factoren ein positives Product geben, ist klar. Jenes folgt aber aus der successiven Multiplication der negativen Factoren in einander sehr leicht. Indem nämlich zwei derselben in einander multiplicirt werden, entsteht ein positives Product, dieses, wiederum mit dem Producte zweier derselben multiplicirt, giebt abermals ein positives Product u. s. w; eine Anzahl von 2n negativen Factoren kann mithin als eine Anzahl von n positiven Producten, wovon jedes zwei dieser negativen Factoren in sich schließt, angesehen werden, und das Resultat ihrer Multiplication muß positiv werden.

§. 288.

Eine Potenz, deren Exponent eine ungerade Zahl ist, wird positiv, oder negativ, je nachdem es die Wurzel ist. Es ist:

1) $(+ a)^{2n+1} = + a^{2n+1}$

2) $(- a)^{2n+1} = - a^{2n+1}$

Das Erste ist an sich klar. Das Zweite kann so bewiesen werden: da die ungerade Zahl aus der geraden durch Hinzufügung von eins entstanden angesehen werden darf, so kommt dem schon gebildeten Producte einer geraden Anzahl

nega-

negativer Factoren, welches positiv wurde, noch ein negativer Factor hinzu, um das Product aus einer ungeraden Anzahl solcher in einander darzustellen, und dies wird dadurch eine negative Größe werden müssen.

§. 289.

Ein Product wird potenziirt, indem man jeden seiner Factoren, zu der vorgeschriebenen Potenz erhoben, wieder als Factor setzt.

Z. B. $(ab)^n = a^n b^n$

$(abc)^n = a^n b^n c^n$

u. s. w.

1) Ist der Exponent der zu bildenden Potenz eine positive ganze Zahl, so fordert er die Wurzel so oft als Factor zu setzen, als er selbst die Einheit als Theil enthält; wenn nun die Wurzel aus Factoren besteht, so wird hierbei die Multiplication gleicher Producte in einander verlangt, in deren Resultate alle die Factoren wieder erscheinen, welche in diesen Producten lagen (§. 55); jeder derselben kommt darin folglich so oft als Factor, d. h. zu der gleich hohen Potenz erhoben, vor, als gleiche Producte in einander multiplicirt wurden.

2) Wird eine negative Zahl als Exponent angenommen, so zeigt die Zurückführung einer solchen Potenz auf eine andere mit positivem Exponenten (nach §. 189), daß auch in diesem Falle die gegebene Regel gültig ist. Man hat z. B.

$$(ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} \cdot b^{-n}.$$

§. 290.

Ein Bruch wird zur Potenz erhoben, indem man die vorgeschriebene Potenz vom Zähler und vom Nenner bildet, und die erste wieder zum Zähler die zweite zum Nenner eines Bruchs macht.

1) Es ist $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, worin n eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Denn bei der Multiplication mehrerer Brüche in einander wird das Product sämmtlicher Zähler der Zähler, das sämmtlicher Nenner der Nenner des Resultats; hier, wo durch das mehrmalige Setzen desselben Bruchs als Factor die Zähler unter sich und die Nenner unter sich gleich werden, giebt mithin sowohl das Product der Zähler eine so hohe Potenz desselben, als Brüche in einander multiplicirt werden, als auch das Product der Nenner eine eben so hohe des Nenners.

2) Auch wenn der Exponent eine negative ganze Zahl ist, bleibt die ausgesprochene Regel anwendbar.

Es ist $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$;

denn $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n}$ (§. 103).

Nun ist $\frac{b^n}{a^n} = b^n \cdot \frac{1}{a^n} = b^n \cdot a^{-n}$

und da $b^n = \frac{1}{b^{-n}}$ (§. 189),

so ist $b^n \cdot a^{-n} = \frac{1}{b^{-n}} \cdot a^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$.

§. 291.

Aus dem Beweise in Nr. 2 des vorigen §. ist zugleich zu ersehen, daß die Potenz eines negativen Exponenten von einem Bruche am einfachsten dadurch hervorgebracht wird, daß man den Bruch vorher umkehrt und ihn dann zu der Potenz des gleich großen positiven Exponenten erhebt. Es ist:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = \frac{b^n}{a^n}.$$

§. 292.

Auf gleiche Art, wie es bei den zweiten und dritten Potenzen geschah, läßt sich zeigen, daß bei einer beliebig hohen Potenz eines Bruchs, dieselbe ein ächter oder unächter Bruch wird, je nachdem die Wurzel das eine oder das andere ist, und daß, wenn in der Wurzel Zähler und Nenner keine gemeinschaftliche Factoren enthalten, solches auch nicht in der Potenz derselben der Fall seyn, — jede Potenz eines eigentlichen Bruchs mithin nie einer ganzen Zahl gleich werden kann.

Wurzelausziehung.

§. 293.

Da die Wurzelausziehung das Umgekehrte der Potenziirung ist, und dazu dienen soll, diese wieder aufzuheben, so wird ihre Ausführung in eben dem Maaße an Größen vorzunehmen seyn, als die Erhebung zur Potenz an diesen geschah; und so gehen aus den über letztere vorgetragenen Sätzen die folgenden hervor.

§. 294.

Die Wurzel eines Grades von gerader Zahl (2n) läßt sich nur aus einer positiven Zahl ziehen. Die Andeutung dieser Operation bei einer negativen Zahl schließt eine Forderung in sich, der unmöglich ein Genüge zu leisten ist, da sie alsdann eine Größe anzugeben verlangte, welche, eine gerade Anzahl Male als Factor gesetzt, etwas Negatives hervorbrächte, vorhin aber bewiesen ist, daß jede gerade Anzahl gleicher Factoren ein positives Product erzeugt. (§. 287).

Ein Ausdruck, wie allgemein

$$\sqrt[2n]{-a},$$

kann daher nicht realisirt werden; man nennt ihn eine unmögliche, auch eine imaginaire Größe. Da, wo Operationen auf solche Größe führen, kann mit denselben, als Wurzelgrößen, aber ferner doch noch operirt werden; es findet sich alsdann zuletzt, ob das Resultat ihrer Verknüpfungen wieder etwas Unmöglich-Forderndes oder eine zu realisirende Größe hervorbringt. In beiden Fällen wird es uns aber Antwort auf eine durch arithmetische Operationen zu lösende Frage geben, wenn diese auf dergleichen Größen führten. Auch geben in der That gewisse Verknüpfungen imaginairer Größen wiederum reelle Größen als Resultat.

§. 295.

Der Satz, daß eine gerade Anzahl positiver oder negativer Factoren allemal ein positives Product hervorbringt, zeigt ferner, daß bei der Ausziehung der Wurzeln eines geraden Wurzel-Exponenten aus einer positiven Zahl eine Zweideutigkeit unvermeidlich bleibt, wenn diese Operation auch übrigens zu verrichten ist: die Größe der gefundenen Wurzel kann dabei so gut positiv als negativ genommen werden. Man hat daher:

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = \mp a.$$

§. 296.

Da aber eine ungerade Anzahl positiver oder negativer Factoren ein positives oder negatives Product gab, so findet bei der Ausziehung der Wurzel eines ungeraden Wurzel-Exponenten keine Zweideutigkeit Statt; die Wurzel ist in diesem Falle positiv oder negativ, je nachdem es die Größe ist, woraus sie gezogen wird. Es ist:

$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = +a$, und $\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -a$.

§. 297.

Aus einem Producte wird die Wurzel eines beliebigen Grades dadurch gezogen, daß man die Wurzeln dieses Grades aus jedem seiner Factoren, in einander multiplicirt.

Es ist z. B. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Denn die Potenziirung des Products geschah an jedem Factor desselben; bei der Wurzelausziehung aus einem Producte muß mithin jene Operation an jedem Factor desselben wieder aufgehoben werden.

§. 298.

Eben so folgt aus der Potenziirung eines Bruchs (§. 290), daß

aus einem Bruche die Wurzel gezogen wird, indem man sie aus seinem Zähler und aus seinem Nenner zieht, und diese wieder zum Zähler und Nenner eines Bruchs macht.

Z. B. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Es ist wichtig, zu bemerken, daß dieser Satz zeigt, daß die Ausführung der Wurzelausziehung bei irgend Brüchen auf die bei ganzen Zahlen zurückkommt.

§. 299.

Da die Entwickelung einer Potenz mit gebrochenem Exponenten auf Erhebung zur Potenz eines ganzen Exponenten und Wurzelausziehung eines gewissen Grades zurückgeführt werden kann (§. 189), so läßt sich durch Hülfe der beiden letzten §§. die Potenziirung eines Products und eines Bruchs auch in dem Falle, in welchem die Exponenten Brü-

che sind, unter die Regeln der §§. 289 und 290 bringen, wodurch die völlige Allgemeinheit derselben für jeden Werth des Exponenten dargethan wird.

Nämlich:

1) Es ist $(ab)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{n}{m}}$; denn

$$(ab)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(ab)^n} \qquad (§. 189.)$$
$$= \sqrt[m]{a^n b^n} \qquad (§. 289.)$$
$$= \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^n} \qquad (§. 297.)$$
$$= a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{n}{m}} \qquad (§. 189.)$$

2) Es ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}; \text{ denn:}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} \qquad (§. 189.)$$
$$= \sqrt[m]{\frac{a^n}{b^n}} \qquad (§. 290.)$$
$$= \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{b^n}} \qquad (§. 298.)$$
$$= \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}} \qquad (§. 189.)$$

§. 300.

Anmerk. Die Ableitung der Sätze, nach welchen Potenzirung und Wurzelausziehung eines unbestimmten Grades an Größen, die aus Theilen bestehen, vollzogen werden, erfordert namentlich die Anwendung combinatorischer Opera-

tionen, und kann daher an dieser Stelle nicht geschehen (Vergl. §. 286). Indessen wird es gut seyn, diese Sätze, wenigstens ihrem Inhalte nach, vorläufig kennen zu lernen, um sich zu überzeugen, daß die bisherigen Untersuchungen auf jede Art von Größen ausgedehnt werden können, dabei selbst aber wieder zum Grunde liegen.

1) Der binomische Lehrsatz zeigt, daß, welche ganze Zahl der Exponent (n) auch bedeuten mag, die Potenz einer zweitheiligen Größe, eines Binomiums, (a + b) aus dem Exponenten und den Theilen der Wurzel nach folgender Formel gebildet wird:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n.$$

Das Gesetz, welches in dem Fortschritte dieser Entwickelung liegt, ist leicht in Worten auszusprechen, wodurch die zwischen dem ersten und letzten Gliede liegenden Glieder, die sich bei der Unbestimmtheit der Größe n nicht sämmtlich hinschreiben lassen, anzugeben sind. Hiernach ist z. B.

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}a^5b^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^4b^3 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^3b^4 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}a^2b^5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}ab^6 + b^7;$$

oder, indem die Coefficienten wirklich berechnet werden:

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

2) Durch eine weitere Ausdehnung des binomischen Lehrsatzes wird bewiesen, daß für jeden Werth des Exponenten, bei der Erhebung einer zweitheiligen Größe zur Potenz desselben, eine Reihe entsteht, deren Glieder auf gleiche Weise, wie für eine ganze Zahl, aus ihm und der Wurzel gebildet sind.

Da nun $(a + b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(a + b)}$ (§. 189), so ist man dadurch im Stande, die Wurzel eines beliebigen Grades aus einer zweitheiligen Größe zu ziehen.

3) Im polynomischen Lehrsatze wird eine Formel für die Potenz jedes beliebigen Exponenten von einer aus mehr als zwei Theilen bestehenden, einer vieltheiligen (polynomischen), Wurzel gegeben, so daß man dadurch die Aufgaben der Potenziirung und Wurzelausziehung bei ganz beliebig zusammengesetzten Größen lösen kann.

§. 301.

Aus der Kenntniß der Beziehungen zwischen Wurzel und Potenz bei allgemeinen Größen, ergeben sich die zwischen Wurzel und Potenz bei bestimmten Zahlen, durch eine leichte Anwendung jener, wie dies bei den zweiten und dritten Potenzen ausführlich gezeigt ist.

In der Praxis werden indessen die Operationen der Potenziirung und Wurzelausziehung eines beliebig hohen Grades bei allen Arten von bestimmten Zahlen durch den Gebrauch der Logarithmen ungemein erleichtert, so daß jene Anwendung, die außerdem, je höher der Grad der Wurzelausziehung ist, auf sehr beschwerliche und weitläufige Rechnungen führt, entbehrlich gemacht wird.

Anmerk. Das Gesetz, welches in der Bildung der Potenz eines gewissen Grades von einer zweitheiligen und vieltheiligen Größe herrscht, auf vielziffrige Zahlen angewandt, wird immer das Mittel geben, aus ihnen die Wurzel eines eben so hohen Grades zu ziehen.

Z. B. Aus der allgemeinen Form der siebenten Potenz einer zweitheiligen Größe $(a + b)^7 = a^7 + 7\,a^6b +$ u. s. w., welche auch ohne höhere Kenntnisse durch unmittelbare Multiplication abgeleitet werden kann, würde für die Ausziehung der Wurzel des siebenten Grades aus einer vielziffrigen Zahl folgen, daß sie von der Rechten zur Linken in Classen zu 7 Ziffern eingetheilt werden müßte; und

daß, nachdem durch Hülfe einer Potenzen-Tabelle diejenige einfache Zahl als erster Theil der Wurzel bestimmt wäre, deren siebente Potenz der höchsten Classe am nächsten kommt, der Divisor zur Entdeckung des zweiten Theils der Wurzel das Siebenfache der sechsten Potenz des ersten Theils derselben seyn würde u. s. w.

Aus diesem Beispiele erhellet, daß, wenn es darauf ankäme, sehr leicht für die Ausziehung der Wurzel jedes beliebig hohen Grades aus vielziffrigen Zahlen die erforderlichen Regeln aufgefunden werden könnten.

§. 302.

Auf Irrational-Ausdrücke wird man bei Ausziehung der Wurzeln desto mehr treffen, je höher der Grad der auszuziehenden Wurzel ist; denn die Potenz einer ganzen Zahl wird ihre Wurzel desto mehr an Größe übertreffen, je höher der Grad der Potenz ist. Zwischen den Potenzen von zwei um eine Einheit verschiedenen ganzen Zahlen werden also, so wie der Grad der Potenz höher angenommen wird, immer mehr ganze Zahlen liegen, die keine Potenzen eben des Grades, oder kein Product aus so vielen gleichen Factoren sind, als dieser Grad Einheiten enthält; umgekehrt können sie auch nicht darin zerfällt, oder es kann aus ihnen nicht die Wurzel desselben Grades gezogen werden. Die weitere Ausführung des Beweises, daß es in diesem Falle keine Zahl giebt, die als die geforderte Wurzel angenommen werden dürfte, ist ganz so, wie der Beweis bei den Irrationalitäten, auf welche die Quadrat- und Cubicwurzel-Ausziehung führte. Und eben so, wie bei diesen, kann auch bei jedem andern Irrational-Ausdrucke gezeigt werden, daß sich die Grenzen einer Zahl, welche seiner Forderung entspricht, immer enger zusammenziehen lassen.

Sechstes Capitel.

Von den Rechnungsarten mit Potenzen.

---

§. 303.

Das gegenwärtige Capitel handelt davon: Größen, die als Potenzen einer gewissen Wurzel gegeben sind, durch die vier Grundoperationen der Arithmetik mit einander zu verknüpfen, und an ihnen selbst wieder Potenziirung und Wurzelausziehung vorzunehmen.

Da bei diesen Größen die Entwickelung der Potenz nicht ausgeführt gedacht werden soll, so ist es ganz gleichgültig, welche Zahl man zur Wurzel annehmen will, nur auf die gegenseitige Beziehung der Wurzeln der zu verknüpfenden Potenzen kommt es an. Aus diesem Grunde werden die Wurzeln der Potenzen hier ausschließlich mit unbestimmten einfachen Zeichen: a, b, c ꝛc. angedeutet.

§. 304.

Die Rechnungsarten mit Potenzen müssen sich über jede Art derselben erstrecken, d. h. man muß zu Exponenten der in Rechnungen zu verflechtenden Potenzen sowohl negative als positive Zahlen, und sowohl Brüche als ganze Zahlen zulassen. Indessen erfordern die Potenzen mit gebrochenen Exponenten die Behandlung von Wurzelgrößen, mit denen sie übereinstimmend sind, und setzen daher spätere Untersuchungen voraus, weshalb wir sie von Potenzen, deren Exponenten ganze Zahlen sind, für jetzt trennen, und sie zum Gegenstande des nächsten Capitels machen, welches dann zeigen wird, daß alle Sätze, welche über diese hier abgeleitet

werden, auf gleiche Art bei Potenzen mit gebrochenen Exponenten anwendbar sind.

Addition und Subtraction.

§. 305.

Nur wenn Potenzen als Größen von einerlei Art auftreten, lassen sie sich durch Addition oder Subtraction wirklich vereinigen. Damit aber Potenzen gleichartig genannt werden dürfen, ist sowohl die Gleichheit ihrer Wurzeln, als auch die ihrer Exponenten erforderlich. Die Regel für ihre Addition oder Subtraction ergiebt sich in diesem Falle aus denen, welche für die betreffenden Operationen bereits im Allgemeinen im ersten Abschnitte abgeleitet sind, als folgende:

man addire oder subtrahire die Coefficienten gleichartiger Potenzen, und setze diesem Resultate die gemeinschaftliche Potenz wiederum als Factor bei.

Hiernach ist z. B.

$$6a^3 + 4a^3 = 10a^3;$$
$$pa^r + qa^r = (p + q)a^r;$$
$$8a^5 - 3a^5 = 5a^5;$$
$$pa^n - qa^n = (p - q)a^n.$$

§. 306.

Werden Potenzen, die nicht von jener Beschaffenheit sind, zur Addition oder Subtraction gegeben, so können diese Operationen mit denselben nur durch Andeutung geschehen. Die wirkliche Vereinigung derselben setzt alsdann ihre berechneten Werthe voraus, wodurch sie erst als gleichartig erscheinen, welches bei ihrer Verbindung durch Zeichen bloß angenommen werden muß. Z. B.

$$5a^4 + 8b^3 = 5a^4 + 8b^3;$$
$$pa^2 - qa^3 = pa^2 - qa^3;$$
$$pa^r + qb^r = pa^r + qb^r, \text{ u. s. w.}$$

§. 307.

Die Berechnung folgender Exempel ist durch die beiden letzten §§. verständlich. (Man vergleiche damit auch ersten Abschn. §§. 33. 40.)

1) Für die Addition:

$$\begin{array}{rl} & 3a^3 + 4b^2 - c^5 \\ & 5a^3 - 4b^2 + 5c^5 - 3d^7 \\ & -2a^3 + 3b^2 - 2c^5 + d^7 \\ \hline \text{Summe} \ldots & 6a^3 + 3b^2 + 2c^5 - 2d^7. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & pa^r + qb^n - c^x + d^r \\ & ma^r - gb^n - hc^x - e^n \\ \hline \text{Summe} & (p+m)a^r + (q-g)b^n - (h+1)c^x + d^r - e^n. \end{array}$$

2) Für die Subtraction.

$$\begin{array}{rl} \text{Minuend} \ldots\ldots & 2a^n - 3b^4 + 8c^3 + 5d^2 \\ \text{Subtr.} \ldots\ldots & -8a^n - 5b^4 + 3c^3 + 8d^2 \\ & \;\;+ \qquad\; + \qquad - \qquad - \\ \hline \text{Differenz} \ldots & 10a^n + 2b^4 + 5c^3 - 3d^2. \end{array}$$

Multiplication.

§. 308.

Wenn die in einander zu multiplicirenden Potenzen einerlei Wurzel haben, so läßt sich diese Operation auf eine in dem Wesen derselben begründete Art ausführen; nämlich:

Potenzen von einerlei Wurzel werden in einander multiplicirt, indem man die Summe ihrer Exponenten zum Exponenten einer neuen Potenz derselben Wurzel macht.

Es ist nur nöthig, diese Regel an zwei Potenzen zu beweisen, da auf die Multiplication von zweien in einander, die von mehreren zurückkommt (erster Abschn. §. 52 und folgende). Aber der positive oder negative Werth des Ex-

ponenten erfordert die Unterscheidung folgender Fälle bei dem Beweise.

1) Sind die Exponenten zweier Potenzen positive Zahlen, so geben sie die Anzahl der der Wurzel gleichen Factoren an, aus welchen die respectiven Potenzen bestehen; sind nun die Wurzeln gleich, so liegen im Producte der beiden Potenzen, in welchem ihre sämmtlichen Factoren wieder erscheinen müssen (§. 55), so viele unter einander gleiche Factoren, als in beiden zusammengenommen, oder dies Product ist eine Potenz derselben Wurzel, deren Grad gleich der Summe der Exponenten der in einander multiplicirten Potenzen ist. Z. B.

$$a^3 \cdot a^4 = a^7;$$
$$a^n \cdot a^r = a^{n+r}.$$

2) Ist der Exponent der einen Potenz positiv, der der andern negativ, so bringt man die letztere auf die gleichgeltende mit positivem Exponenten nach §. 189 zurück und führt die Multiplication aus. Man hat daher:

$$a^n \cdot a^{-r} = a^n \cdot \frac{1}{a^r} = \frac{a^n}{a^r}.$$

Im Zähler und Nenner des so erhaltenen Bruchs liegen gleiche Factoren, die also gegen einander weggelassen werden dürfen. Es sey zuerst $n > r$, so fallen alle Factoren des Nenners gegen eben so viele in dem Zähler weg, als jener enthält, oder der Nenner geht in dem Zähler auf, und im letztern bleiben nach diesem Aufheben so viele gleiche Factoren (a), als der Unterschied $n - r$ angiebt, oder es wird:

$$\frac{a^n}{a^r} = a^{n-r}$$

Ist aber $n < r$, so geht der Zähler in dem Nenner

auf; jener wird dadurch die Einheit, und dieser eine Potenz von a, welche den Unterschied $r - n$ zum Exponenten hat, d. h. es ist:

$$\frac{a^n}{a^r} = \frac{1}{a^{r-n}}.$$

Es ist aber $\frac{1}{a^{r-n}} = a^{-(r-n)}$ (§. 189) $= a^{n-r}$.

Ist endlich $n = r$, so ist $\frac{a^n}{a^r} = 1$. Man darf aber auch in diesem Falle $\frac{a^n}{a^r} = a^{n-r}$ setzen, denn für $n = r$ ist $a^{n-r} = a^0$, und a^0 ist nach §. 190 ebenfalls $= 1$.

Was demnach auch das Größen-Verhältniß der ganzen Zahlen n und r seyn mag, so wird:

$$a^n \cdot a^{-r} = a^{n-r},$$

oder die Multiplication der beiden Potenzen a^n und a^{-r} in einander geschieht, auf die ausgesprochene Weise durch Addition ihrer Exponenten.

3) Wenn beide in einander zu multiplicirende Potenzen negative Zahlen zu Exponenten haben, so kann der Beweis des aufgestellten Satzes durch die Zurückführung dieser Potenzen auf Potenzen mit positiven Exponenten, und durch die Anwendung der unter Nr. 1 schon bewiesenen Regel geführt werden. Nämlich:

$$a^{-n} \cdot a^{-r} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^r} = \frac{1}{a^{n+r}},$$

Es ist aber $\frac{1}{a^{n+r}} = a^{-(n+r)}$ (§. 189);

mithin auch $a^{-n} \cdot a^{-r} = a^{-(n+r)}$,

oder die Exponenten der Factoren addirt, giebt den Exponenten des Products.

§. 309.

Wenn die Potenzen Coefficienten neben sich haben, so läßt man das Product derselben wieder als Coefficient dem Producte der Potenzen vorangehen. (§. 54).

Beispiele.

$4a^5 \, . \, a^3 = 4a^8$.
$3a^2 \, . \, 6a^{-4} = 18a^{-2}$.
$pa^r \, . \, qa^{-n} = pqa^{r-n}$.
$na^{-5} \, . \, 4a = 4na^{-4}$.

§. 310.

Bei der Multiplication von Potenzen mit ungleichen Wurzeln, läßt sich keine Abkürzung anbringen; man verfährt dabei nach bekannten Regeln dieser Operation. (Erster Abschnitt §. 48).

Z. B. $a^r \, . \, b^n = a^r b^n$.

Es ist übrigens an sich klar, daß wenn in den zu multiplicirenden Größen mehrere Potenzen als Factoren liegen, wovon einige gleiche Wurzeln haben, diese nach §. 308 in einander multiplicirt, und die andern ihrem Producte als Factoren beigerückt werden (§. 56).

Z. B. $5a^{-3}b^4 \, . \, 3ab^5c^{-3} = 15a^{-2}b^9c^{-3}$;
$pa^nb^{-r}c^3 \, . \, qa^{-m}b^md^x = pqa^{n-m}b^{m-r}c^3d^x$.

§. 311.

Die Multiplication zusammengesetzter Größen, deren Theile selbst aus Factoren bestehen, welche Potenzen gewisser Wurzeln sind, ist aus dem Vorhergehenden und aus §. 57 des ersten Abschnitts klar.

Folgendes Beispiel mag die Berechnung des Products solcher Größen darstellen:

Multiplicand $2a^4 + 5a^3b - a^2b^2 + 4ab^3$
Multiplicator $3a^2 + 8ab - b^2$

$6a^6 + 15a^5b - 3a^4b^2 + 12a^3b^3$
$+ 16a^5b + 40a^4b^2 - 8a^3b^3 + 32a^2b^4$
$- 2a^4b^2 - 5a^3b^3 + a^2b^4 - 4ab^5$

Product $6a^6 + 31a^5b + 35a^4b^2 - a^3b^3 + 33a^2b^4 - 4ab^5$.

§. 312.

Da

$$\frac{a^r}{b^n} = a^r \cdot \frac{1}{b^n} = a^r b^{-n},$$

und eben so

$$\frac{a^r}{b^{-n}} = a^r \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^r b^n,$$

so kann man bei einem aus Factoren bestehenden Ausdrucke, beliebige dieser Factoren aus dem Zähler in den Nenner bringen, und umgekehrt. Man hat nur nöthig, den Exponenten der so zu versetzenden Factoren das entgegengesetzte Zeichen zu geben. Die negativen Exponenten können dadurch ganz vermieden werden. Hiernach ist z. B.

$$5a^n b^{-r} c^{2-x} = \frac{5a^n}{b^r c^{x-2}};$$

$$\frac{a^{-n} b^r}{c^{-x}} = \frac{b^r c^x}{a^n}.$$

§. 313.

Nachstehende Folgerungen aus dem Multiplications-Theorem des §. 308 sind noch besonders zu bemerken:

1) Jede Potenz, deren Exponent aus Theilen besteht, kann in eben so viele Factoren zerlegt werden, als ihr Exponent Theile enthält; diese Factoren sind Potenzen derselben Wurzel, und ihre Exponenten die Theile des anfänglichen Exponenten. Z. B.

$$a^{n+r-x} = a^n \cdot a^r \cdot a^{-x};$$
$$a^{n-2} = a^n \cdot a^{-2};$$
$$a^{n+3} = a^n \cdot a^3 \text{ u. dgl. m.}$$

2) Da $a^n \cdot a = a^{n+1}$,

so gilt der Satz allgemein, daß jede Potenz, mit ihrer Wurzel multiplicirt, die um eins höhere Dignität derselben Wurzel

zel giebt. Beim Cubiren ist von diesem Satze schon Gebrauch gemacht.

Division.

§. 314.

Die Regel für die Division der Potenzen fließt aus der für ihre Multiplication, und es ist nicht nöthig, die verschiedenen Fälle, welche die Beschaffenheit der Exponenten mit sich bringen möchte, wiederum einzeln durchzugehen. Der Satz des §. 312 bietet die Ableitung der hier anzuwendenden allgemeinen Regel sogleich dar. Nach ihm ist:

$$\frac{a}{b^n} = a \,.\, b^{-n} \text{ und}$$

$$\frac{a}{b^{-r}} = a \,.\, b^r .$$

Was also auch der Dividend (a) seyn mag, die Division durch eine Potenz geschieht an ihm, indem man ihm diese mit entgegengesetztem Exponenten als Factor giebt.

Daraus folgt nun sehr leicht die Regel für die Division der Potenzen von einerlei Wurzel: man subtrahire den Exponenten des Divisors von dem des Dividends, und mache den Rest zum Exponenten derselben Wurzel, die jene beiden haben; so giebt diese Potenz den gesuchten Quotienten.

Denn dadurch, daß der Divisor mit entgegengesetztem Exponenten als Factor gesetzt wird, und man nach §. 308 die Multiplication mit ihm an dem Dividend vollzieht, geschieht nichts anders, als das, was in dieser Regel vorgeschrieben ist.

Demnach ist:

$$a^n : a^r = a^{n-r};$$

$$a^{-n} : a^r = a^{-n-r} = a^{-(n+r)}$$

$$a^{-n} : a^{-r} = a^{-n+r} = a^{r-n}.$$

§. 315.

Indem man nun noch bekannte Regeln aus der Division zuzieht (erster Abschn. §§. 72 — 74), ist die Berechnung des Quotienten in allen hierher gehörigen Fällen einzusehen. — Darüber folgende Beispiele:

$$12a^4b^{-8}c^3 : 3a^2b^{-3}c^5d^{-7} = 4a^2b^{-5}c^{-2}d^7$$

$$= \frac{4a^2d^7}{b^5c^2};$$

$$5a^rb^n : 8a^mb^pc^q = \frac{5}{8}\, a^{r-m}b^{n-p}c^{-q}$$

oder auch $= \dfrac{5a^{r-m}b^{n-p}}{8c^q}$;

$$pa^nc^{-r} : qb^rc = \frac{p}{q}\, a^nb^{-r}c^{-r-1} = \frac{pa^n}{qb^rc^{r+1}};$$

$$pa^{x-n}bc : qa^nb^{-r}c^n = \frac{p}{q}\, a^{x-2n}b^{r+1}c^{1-n}$$

$$= \frac{pa^{x-2n}b^{r+1}}{qc^{n-1}}.$$

§. 316.

Hieraus ergiebt sich ferner auch die Division in zusammengesetzten Größen, in so weit sie die Rechnung mit Potenzen betrifft, und mit Zuziehung des §. 77 ersten Abschnitts, wird folgendes Exempel, in welchem die dort erwähnte Ordnung beobachtet ist, verständlich seyn.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
8a^5b & -14a^4b^2 & +11a^3b^3 & -6a^2b^4 & +ab^5 & 2a^2 - ab + b^2 \\
8a^5b & -4a^4b^2 & +4a^3b^3 & & & \overline{4a^3b - 5a^2b^2 + ab^3} \\
- & + & - & & & \\
\hline
 & -10a^4b^2 & +7a^3b^3 & -6a^2b^4 & +ab^5 & \\
 & -10a^4b^2 & +5a^3b^3 & -5a^2b^4 & & \\
 & + & - & + & & \\
\hline
 & & 2a^3b^3 & -a^2b^4 & +ab^5 & \\
 & & 2a^3b^3 & -a^2b^4 & +ab^5 & \\
 & & - & + & - & \\
\hline
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Potenziirung.

§. 317.

Eine Potenz wird wiederum zur Potenz erhoben, wenn man ihren Exponenten mit dem der neuen Potenziirung multiplicirt.

1) Für einen positiven Werth des Exponenten der Potenz, auf die eine gegebene erhoben werden soll, wird nichts anders als mehrmaliges Setzen der letztern als Factor gefordert; indem man daher die Regel der Multiplication von Potenzen in einander anwendet, ergiebt sich der hier zu führende Beweis folgendermaaßen:

Es ist $(a^n)^r = a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot a^n \ldots\ldots\ldots$
$$= a^{n+n+n+n+} \ldots\ldots$$
die Anzahl der in diesem Exponenten zu sich selbst zu addirenden n ist aber r, mithin die Summe n . r, folglich
$$(a^n)^r = a^{nr}.$$
Eben so ist
$$(a^{-n})^r = a^{-n} \cdot a^{-n} \cdot a^{-n} \cdot a^{-n} \ldots\ldots$$
$$= a^{-(n+n+n+n+\ldots\ldots)}$$
$$= a^{-nr}.$$
Letzteres kann auch durch die Substitution des Werths $\frac{1}{a^n}$ für a^{-n} bewiesen werden; denn
$$\left(\frac{1}{a^n}\right)^r = \frac{1^r}{a^{nr}} = \frac{1}{a^{nr}} = a^{-nr}.$$

2) Für einen negativen Werth des neuen Exponenten einer angedeuteten Potenz führt die bekannte Zurückführung dieser Potenz nach §. 189 auf die gegebene Regel. Man hat nämlich:
$$(a^n)^{-r} = \frac{1}{(a^n)^r} = \frac{1}{a^{nr}} = a^{-nr};$$
und auch:

$$(a^{-n})^{-r} = \frac{1}{(a^{-n})^r} = \frac{1}{a^{-nr}} = a^{nr}.$$

§. 318.

Eine leichte Folgerung aus dem vorhergehenden Satze ist, daß, wie viele Potenziirungen mit einer Größe auch vorzunehmen seyn mögen, das Product aller Exponenten den Exponenten einer Potenz derselben Wurzel als Resultat geben wird, wobei auf die Zeichen der Exponenten, wie es in der Multiplication gelehrt ist, Rücksicht genommen werden muß. Z. B. $([a^n]^r)^{-m} = a^{-nrm}$.

Sind Coefficienten neben den Potenzen vorhanden, so müssen auch diese potenziirt werden (§. 289). Z. B.

$$(pa^n)^r = p^r a^{nr}.$$

§. 319.

So wie bei der Multiplication die Ordnung der Factoren willkührlich ist, darf also auch mehrmalige Erhebung zur Potenz in beliebiger Ordnung geschehen. Es ist

$$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{mn}.$$

Auch folgt noch aus den beiden letzten §§, daß eine Potenziirung von hohem Grade auf mehrere Potenziirungen niederer Grade zurückgeführt werden kann, wenn jener Grad in Factoren ganzer Zahlen zerlegbar ist. Z. B.

$$a^6 = (a^3)^2.$$

Wurzelausziehung.

§. 320.

Da durch die Wurzelausziehung die Potenziirung aufgehoben werden soll, so giebt die Regel des §. 317 sogleich die folgende:

Aus einer Potenz wird die Wurzel eines beliebigen Grades gezogen, indem man ihren Exponenten durch den Grad der auszuziehenden Wurzel dividirt.

Es ist demnach:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m:n} \text{ oder } = a^{\frac{m}{n}};$$

$$\sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-(m:n)} \text{ oder } = a^{-\frac{m}{n}}.$$

Nur in dem Falle, in welchem die Division des Wurzelgrades in den Exponenten der Potenz eine ganze Zahl giebt, kann man die Wurzelausziehung ausgeführt nennen; denn der Ausdruck einer Potenz mit gebrochenem Exponenten findet selbst erst wieder seine Erklärung in der einer Wurzelgröße, und ist nur eine andere Art ihrer Andeutung (§. 189).

Siebentes Capitel.

Von den Rechnungsarten mit Wurzelgrößen.

---

§. 321.

Bei den Wurzelgrößen, Ausdrücken, in welchen die Ausziehung der Wurzel eines gewissen Grades angedeutet ist, machen der Wurzelgrad oder Wurzel-Exponent und die Größe unter dem Wurzelzeichen die wesentlichen Größen aus.

Bei dem Rechnen mit Wurzelgrößen ist es, so lange von dem Werthe eines solchen Ausdrucks abgesehen wird, willkührlich, welche Größe unter dem Wurzelzeichen steht; daher diese insofern dabei mit unbestimmten einfachen Zeichen angedeutet wird. Da es aber mehrentheils darauf ankommt, die Größe unter dem Wurzelzeichen als eine Potenz zu betrachten, — und dies bei jeder Größe geschehen kann

(§. 191), — so legt man ihr im Allgemeinen auch einen Exponenten bei, der zur gehörigen Unterscheidung unter dem Namen „Exponent der Größe unter dem Wurzelzeichen" aufgeführt werden, und sich dann jederzeit auf diese ganze Größe beziehen soll.

Es kann demnach unter: $\sqrt[n]{a^r}$ die allgemeine Form der Wurzelgrößen begriffen werden; worin jedoch unter n ausschließlich eine ganze positive Zahl zu verstehen ist, indem es nur eine Anzahl bedeuten darf (§. 178).

Anmerkung. Sieht man auf die Realisirung einer Wurzelgröße, so ist freilich der Werth der Größe unter dem Wurzelzeichen bei gewissen Wurzelgraden wohl in Betracht zu ziehen, indem sie in vielen Fällen gar nicht Statt finden kann (§§. 294. 302). Indessen hindert dies nicht, vorher mit dergleichen Ausdrücken Operationen so vorzunehmen, wie es ihr Wesen als Wurzelgröße überhaupt mit sich bringt.

§. 322.

Soll eine Wurzelgröße mehrere Male gesetzt werden, so geschieht die Andeutung davon dadurch, daß man ihr die Zahl als Coefficient vorsetzt, welche zeigt, wie oft sie gesetzt werden soll, z. B.

$$(\sqrt[n]{a^r}) \, . \, p = p\sqrt[n]{a^r} \, .$$

Der Coefficient p darf auch ein Bruch seyn, und es ist hierin zugleich die Art eine Wurzelgröße zu multipliciren oder zu dividiren ausgesprochen. Denn da der Werth derselben nicht erst berechnet werden soll, so können auch diese Operationen bei ihr nur angedeutet werden.

§. 323.

Bevor wir zur Verknüpfung von Wurzelgrößen unter sich selbst übergehen, ist es erforderlich, einige Veränderungen kennen zu lernen, welche, unbeschadet ihrer Werthe, mit den Formen dieser Größen vorgenommen werden können.

Diese haben besonders ihren Grund darin, daß der Wurzelgrad und der Exponent der Größe unter dem Wurzelzeichen in derselben Beziehung, wie Nenner und Zähler eines Bruchs, gegen einander stehen; denn es ist

$$\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}}.$$

§. 324.

Hieraus folgt der Satz;

Der Wurzelgrad und der Exponent der Größe unter dem Wurzelzeichen dürfen mit einerlei Zahl multiplicirt, und mit einerlei Zahl dividirt werden; der Werth der Wurzelgröße wird dadurch nicht verändert.

Es ist daher;

1) $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[nm]{a^{rm}}$, und

2) $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n:m]{a^{r:m}}$.

Bei der zweiten Veränderung ist es erforderlich, daß die Divisionen des Wurzelgrades und des Exponenten der Größe unter dem Wurzelzeichen ganze Zahlen als Resultate geben, widrigenfalls der Ausdruck seine Bedeutung verlieren, oder doch zusammengesetzter, und erst durch die umgekehrte Operation, welche jene Veränderung wieder aufhöbe, verständlich werden würde. Denn der Wurzelgrad darf nie eine gebrochene Zahl seyn, indem er dazu dient, die Anzahl der gleichen Factoren, worin eine Größe zerlegt werden soll, anzugeben.

Findet sich eine Zahl, welche zugleich Wurzelgrad und Exponent der Größe unter dem Wurzelzeichen ohne Rest dividirt, so wird diese Division zur Vereinfachung des Ausdrucks jedesmal vorgenommen; denn je niedriger der Wurzelgrad, desto einfacher ist im Allgemeinen der Ausdruck einer Wurzelgröße.

Hiernach ist z. B.

$$\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2};$$

$$\sqrt[nm]{a^{rm}} = \sqrt[n]{a^r};$$

$$\sqrt[nr]{a^r} = \sqrt[n]{a}.$$

Anmerk. So lange man Wurzelgrößen als solche beibehält, und nicht auf die Verwirklichung des in ihnen angedeuteten Werths sieht, also auch von dem etwaigen Zeichen, den dieser bekommen könnte, abstrahirt, kann der Satz des vorstehenden §. unbedingt angewandt werden. Im andern Falle sind dabei jedoch noch besondere Rücksichten zu nehmen, welche darauf beruhen, daß jede Wurzelgröße eben so viele verschiedene Werthe zulässig macht, als der Grad der auszuziehenden Wurzel Einheiten enthält, — ein Satz, welcher freilich erst in der höhern Algebra allgemein bewiesen werden kann. — Wird nun der Wurzelgrad durch Multiplication vergrößert, so werden auch der Form nach mehr Werthe für die Wurzelgröße entstehen, als sie vorher gestattete, und es kömmt sehr darauf an, diejenigen Werthe, welche in einem vorliegenden Falle zulässig sind, von andern zu trennen. Aehnliches ist bei der umgekehrten Operation, nämlich bei der Division des Wurzelgrades zu bemerken. Ein Beispiel wird diese allgemeine Bemerkung erläutern.

Wenn in $\sqrt[n]{a^r}$ die Größe a negativ, r eine ungerade, n eine gerade Zahl, also der Ausdruck eine imaginaire Größe ist, so würde letztere durch Multiplication des Wurzelgrades und Exponenten unter dem Wurzelzeichen mit einer geraden Zahl m, sich in $\sqrt[nm]{a^{rm}}$ verwandeln, worin nun die Größe unter dem Wurzelzeichen positiv, also die Unmöglichkeit verschwunden wäre; während doch diese Operation ihren Werth unverändert lassen sollte. Auf solche Art könnte man z. B. für $\sqrt[4]{-a^3}$ setzen $\sqrt[8]{a^6}$. Dies anscheinende Paradoxon kann erst dann beseitigt werden, wenn man sämmtliche 8 Werthe aufzustellen im Stande ist, welche $\sqrt[8]{a^6}$ giebt, wor-

unter sich 6 unmögliche finden, wovon 4 dem Werthe $\sqrt[4]{-a^3}$ entsprechend seyn werden. Ein anderes Beispiel bietet $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ dar. In $\sqrt[12]{a^8}$ liegt eine Zweideutigkeit, und in $\sqrt[3]{a^2}$ scheint diese gehoben. Es ist hier aber eigentlich mit $\sqrt[12]{a^8}$ diese Veränderung vorgenommen: $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[4]{(\sqrt[3]{a^2})^4}$. (S. §§. 341. 343). Man kann nun zwar die Erhebung zur vierten Potenz und Wurzelausziehung des vierten Grades gegenseitig sich aufhebend ansehen und weglassen; will man aber den Werth der Wurzelgröße darstellen, so liegen im Ausdrucke $\sqrt[4]{(\sqrt[3]{a^2})^4}$ eben sowohl 12 verschiedene als in $\sqrt[12]{a^8}$, wovon zwei mögliche sich nur in dem Zeichen unterscheiden, und insofern die vorige Zweideutigkeit wieder eintritt.

§. 325.

Auf die Multiplication des Wurzelgrades und des Exponenten der Größe unter dem Wurzelzeichen mit einerlei Zahl, gründet sich das Gleichnamigmachen der Wurzelgrößen, oder die Verwandlung von zwei oder mehreren Wurzelgrößen in andere gleichgeltende, welche sämmtlich einerlei Wurzelgrad haben.

Das Verfahren dabei ist ganz dasselbe, wie das beim Gleichnamigmachen der Brüche; auch werden dabei dieselben Abkürzungen angewandt, um den gemeinschaftlichen Wurzelgrad so klein als möglich zu bekommen. Z. B.

Aus den Wurzelgrößen:

$\sqrt[n]{a^r}$ und $\sqrt[m]{b^x}$

werden die gleichnamigen:

$\sqrt[mn]{a^{rm}}$ und $\sqrt[nm]{b^{xn}}$; und die:

$\sqrt[8]{a^5}$ und $\sqrt[12]{b^7}$, verwandeln sich in:

$\sqrt[24]{a^{15}}$ und $\sqrt[24]{b^{14}}$.

§. 326.

Jede Größe kann als eine Wurzelgröße von beliebigem Wurzelgrade dargestellt werden; man hat nur nöthig, sie auch auf eine eben so hohe Potenz zu erheben, als der Grad der Wurzelausziehung Einheiten enthält, welche bei ihr angedeutet werden soll; denn dadurch sind zwei sich einander aufhebende Operationen mit der Größe vorgenommen, ihr Werth muß also ungeändert bleiben. So ist z. B.

$$a = \sqrt[n]{a^n}, \text{ und } a^r = \sqrt[n]{a^{rn}}.$$

Addition und Subtraction.

§. 327.

Wenn mehrere Wurzelgrößen zur Vereinigung gegeben sind, so werden im Fall, daß bei ihnen die Wurzelgrade und die Größen unter dem Wurzelzeichen übereinstimmen, ihre Coefficienten vereinigt; denn diese geben an, wie oft eine Wurzelgröße als Theil zu setzen ist. (§. 322). Z. B.

$$p\sqrt[n]{a^r} \mp q\sqrt[n]{a^r} = (p \mp q)\sqrt[n]{a^r}.$$

Erscheinen aber die Wurzelgrößen nicht als gleichartig, so kann die Addition und Subtraction derselben nur durch die Zeichen dieser Operationen geschehen, und erst ihre berechneten Werthe können als gleichartige Theile zu einer neuen Größe verbunden werden.

§. 328.

Hieraus ergiebt sich für die Addition oder Subtraction zusammengesetzter Größen, deren Theile Wurzelgrößen verschiedener Art sind, die Vorschrift: man suche die gleichartigen in ihnen auf, um sie durch Vereinigung ihrer Coefficienten wirklich zu verbinden, und füge diesem Resultate die übrigen in willkürlicher Ordnung mit den Zeichen bei, welche die Addition oder Subtraction fordern.

Beispiel.

$$5\sqrt[n]{a^r} - 8\sqrt[m]{b^x} + \sqrt[n]{b}$$

$$8\sqrt[n]{a^r} + 2\sqrt[m]{b^x} - \sqrt[m]{c^r}$$

Summe . . . $13\sqrt[n]{a^r} - 6\sqrt[m]{b^x} + \sqrt[n]{b} - \sqrt[m]{c^r}$.

Multiplication.

§. 329.

Es ist §. 289 bewiesen, daß aus einem Producte die Wurzel eines gewissen Grades gezogen wird, indem man die Wurzeln dieses Grades aus jedem Factor des Products wieder als Factoren setzt. Das Umgekehrte dieses Satzes, nämlich: anstatt aus einzelnen Factoren die Wurzel eines und desselben Grades zu ziehen, und diese dann durch Multiplication zu vereinigen, darf man jene Factoren zuerst zu einem Producte vereinigen, und aus ihm die Wurzel eben dieses Grades ziehen; — liefert die Regel für die Multiplication von Wurzelgrößen in einander; nämlich:

Wurzelgrößen von einerlei Wurzelgrad werden in einander multiplicirt, indem man die Größen unter dem Wurzelzeichen in einander multiplicirt, und diesem Producte das gemeinschaftliche Wurzelzeichen wieder vorsetzt. Es ist also

$$\sqrt[n]{a^r} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^r b^m}.$$

Da aber beliebige Wurzelgrößen allemal in gleichnamige verwandelt werden können (§. 325), so schließt die Regel das Multiplications-Verfahren bei jeder Art von Wurzelgrößen in sich, wenn man hinzusetzt:

sind die zu multiplicirenden Wurzelgrößen keine gleichnamige, so verwandele man sie vor-

her in solche. Z. B.

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[r]{b^x} = \sqrt[nr]{a^{mr}} \cdot \sqrt[nr]{b^{xn}} = \sqrt[nr]{a^{mr}b^{xn}}.$$

§. 330.

Vermöge dieses Satzes kann nun gezeigt werden, daß auch Potenzen mit gebrochenen Exponenten, wenn sie einerlei Wurzel haben, durch Addition ihrer Exponenten nach §. 308 in einander multiplicirt werden.

Es ist $a^{\frac{n}{r}} \cdot a^{\frac{m}{q}} = a^{\frac{n}{r}+\frac{m}{q}} = a^{\frac{nq+mr}{rq}}$;

denn $a^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{a^n}$, $a^{\frac{m}{q}} = \sqrt[q]{a^m}$, mithin $a^{\frac{n}{r}} \cdot a^{\frac{m}{q}} =$

$$\sqrt[r]{a^n} \cdot \sqrt[q]{a^m} = \sqrt[rq]{a^{nq} \cdot a^{mr}} = \sqrt[rq]{a^{nq+mr}}$$

$$= a^{\frac{nq+mr}{rq}}.$$

Der Satz findet ebenfalls seine Anwendung, wenn die Exponenten negative Brüche sind; denn es ist

$$a^{-\frac{n}{r}} \cdot a^{-\frac{m}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{r}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{m}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{r}+\frac{m}{q}}} = a^{-\left(\frac{n}{r}+\frac{m}{q}\right)}$$

Die Regel für die Multiplication von Potenzen mit einerlei Wurzel gilt mithin ganz allgemein (Vergl. §. 304).

§. 331.

Haben die zu multiplicirenden Wurzelgrößen Coefficienten, so wird das Product dieser dem Producte jener, als Coefficient wieder beigefügt (erster Abschn. §. 56). Z. B.

$$5\sqrt[n]{a} \cdot 3\sqrt[m]{b} = 15\sqrt[nm]{a^m b^n};$$

$$p\sqrt[n]{a^r} \cdot q\sqrt[n]{b^x} = pq\sqrt[n]{a^r b^x}.$$

§. 332.

In einigen Fällen wird es nützlich, den Coefficienten einer Wurzelgröße mit unter das Wurzelzeichen zu bringen; welches dadurch geschieht, daß man den Coefficienten nach

§. 326 als eine Wurzelgröße ausdrückt, welche mit der Wurzelgröße, deren Coefficient er ist, einerlei Wurzelgrad hat, und dann die Multiplication beider nach §. 329 ausführt. So ist z. B.

$$p\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n]{p^n} \cdot \sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n]{p^n a^r}.$$

§. 333.

Mehr kommt indessen die umgekehrte Operation vor. Befinden sich nämlich in der Größe unter dem Wurzelzeichen Factoren, deren Exponenten dem Wurzelgrade gleich sind, so dürfen sie ohne Exponenten als Coefficient vor das Wurzelzeichen gesetzt werden. Es ist häufig der Fall, daß man durch Multiplication von Wurzelgrößen auf Ausdrücke gelangt, zu deren Vereinfachung man zuletzt diese Umformung vornimmt. Z. B.

$$p\sqrt[n]{a^{n-r}b^m} \cdot q\sqrt[n]{a^r b^x} = pq\sqrt[n]{a^n b^{m+x}} = pqa\sqrt[n]{b^{m+x}}.$$

Oft wird man erst dadurch, daß man die Größe unter dem Wurzelzeichen in Factoren zerlegt, diese Vereinfachung anbringen können. Z. B.

$$\sqrt[n]{a^{r+n}} = \sqrt[n]{a^r \cdot a^n} = a\sqrt[n]{a^r};$$

$$\sqrt[5]{b^8 a^3} = \sqrt[5]{b^5 b^3 a^3} = b\sqrt[5]{(ab)^3}.$$

Auch verschwindet zuweilen durch Anwendung dieses Satzes das Wurzelzeichen vor einem Ausdrucke, z. B.

$$\sqrt[n]{a^{n-r}} \cdot \sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n]{a^n} = a;$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a.$$

Anmerk. Es ist im Allgemeinen zwar $\sqrt{a^2} = \mp a$ (§ 213). Wenn aber $\sqrt{a^2}$ dadurch entstanden ist, daß $\sqrt{a}$ mit sich selbst multiplicirt, die Ausziehung der Quadratwurzel aus a mithin aufgehoben wurde, so muß diese Größe, d. h. $+a$, wieder zum Vorschein kommen. Aus eben dem Grunde wird $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$ und nicht, wie es nach der

Regel für die Multiplication der Wurzelgrößen scheinen möchte, auch $= + a$; indem nach letzterer, $\sqrt{-a}.\sqrt{-a} = \sqrt{(-a)(-a)} = \sqrt{a^2} = \mp a$ würde.

Diese Bemerkung ist bei dem Rechnen mit Wurzelgrößen wohl zu berücksichtigen, und man sieht daraus, wie vorsichtig man bei Anwendung der allgemeinen Regeln hier seyn muß, um nicht auf Irrthümer und Widersprüche zu gerathen.

§. 334.

Bestehen Größen aus Theilen, welche entweder sämmtlich Wurzelgrößen, oder wovon nur einige Wurzelgrößen sind, so ergiebt sich aus den vorstehenden Sätzen das Verfahren bei ihrer Multiplication hinlänglich. Im Allgemeinen wird selten eine Vereinigung der bei einer solchen Multiplication entstehenden Partialproducte möglich seyn. In speciellen Fällen, besonders wenn unter den Wurzelzeichen bestimmte Zahlenwerthe stehen, führen die Umformungen nach den beiden letzten Paragraphen noch gleichartige Partialproducte herbei.

Beispiele.

1. $(\sqrt{a} + p\sqrt[3]{b} - q\sqrt[4]{c}) \cdot (n\sqrt{a} - m\sqrt[3]{b}) = na + np\sqrt[6]{b^2a^3} - qn\sqrt[4]{ca^2} - m\sqrt[6]{b^2a^3} - pm\sqrt[3]{b^2} + mq\sqrt[12]{c^3b^4}$;

oder, das zweite und vierte Partialproduct noch vereinigend,

$$= na + (np - m)\sqrt[6]{b^2a^3} - qn\sqrt[4]{ca^2} - pm\sqrt[3]{b^2} + mq\sqrt[12]{c^3b^4}.$$

2. $(a + \sqrt[n]{b} - \sqrt[r]{c^m})(p - \sqrt[n]{d}) = ap + p\sqrt[n]{b} - p\sqrt[r]{c^m} - a\sqrt[n]{d} - \sqrt[n]{bd} + \sqrt[rn]{c^{mn}d^r}$,

worin sich nichts weiter vereinigen läßt.

3. $(\sqrt{5} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt[3]{2})(2 + \sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 4\sqrt{8} + 6\sqrt[3]{2} + 5 - 2\sqrt{40} + 3\sqrt[6]{500}$.

Hierbei könnte man noch versuchen, die Größen unter den Wurzelzeichen in Factoren, wovon einige Potenzen des Grades der auszuziehenden Wurzel würden, zu zerlegen, und solche dann nach §. 333 vor das Wurzelzeichen bringen.

Z. B. das zweite Glied $4\sqrt{8}$ ist auch $= 4\sqrt{2 \cdot 4} = 8\sqrt{2}$.

§. 335.

Folgende Producte, deren Berechnung zugleich noch als Beispiele zum vorhergehenden §. dienen mögen, kommen häufig in Anwendungen vor. Besonders wird auch rückwärts, wenn sie gegeben sind, ihre Zerlegung in die Factoren gefordert, aus welchen sie gebildet sind.

1. $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$.
2. $(a + \sqrt{-b})(a - \sqrt{-b}) = a^2 + b$.
3. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$.
4. $(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})(\sqrt{-a} - \sqrt{-b}) = -a + b$
   $= b - a$.
5. $(a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2$.

Im letzten Beispiele ist nämlich zunächst:

$$(a + b\sqrt{-1})(1 - b\sqrt{-1}) = a^2 + ab\sqrt{-a} - ab\sqrt{-1}$$
$$- b^2 \cdot (-1),$$

und durch Vereinigung, und weil $- b^2 \cdot (-1) = b^2$, wird daraus: $a^2 + b^2$.

6. $(\sqrt{a} + \sqrt{b}\sqrt{-1})(\sqrt{a} - \sqrt{b}\sqrt{-1}) = a + b$.

Anmerk. Man kann aus diesen Formeln den Satz entlehnen: daß sich die Differenz zweier Größen in zwei Factoren zerlegen läßt, wovon der eine die Summe, der andere die Differenz der Quadratwurzeln dieser Größen ist; wie dies hier für irrationale Werthe der Größen (in Nr. 1. 3. 4.) dargestellt ist. Daß der Satz auch auf Größen von rationalen Werthen Anwendung findet, zeigt die Multiplication von $a + b$ und $a - b$ in einander; denn es ist

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Die Formeln in Nr. 2. 5. und 6. zeigen, daß auch die Summe zweier Größen in zwei Factoren zerlegbar ist, die aus der Summe und Differenz der Quadratwurzeln dieser

Größen bestehen, in ihren zweiten Theilen aber mit dem unmöglichen Factor $\sqrt{-1}$ behaftet sind.

Division.

§. 336.

Gleichnamige Wurzelgrößen werden in einander dividirt, indem man die Größen unter den Wurzelzeichen in einander dividirt, und diesem Quotienten das gemeinschaftliche Wurzelzeichen wieder vorsetzt. Z. B.

$$\sqrt[n]{a^r} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{\frac{a^r}{b^m}}.$$

Denn aus einem Bruche (Quotienten) ward die Wurzel irgend eines Grades gezogen, indem man sie aus Zähler (Dividend) und Nenner (Divisor) zog (§. 298). Wenn daher umgekehrt aus Dividend und Divisor die Wurzel eines und desselben Grades zu ziehen ist, so darf man, anstatt aus jedem besonders, sie aus dem vorher berechneten Quotienten beider ziehen.

Sind die zu dividirenden Wurzelgrößen ungleichnamig, so werden sie zur Anwendung dieser Regel gleichnamig gemacht.

Daher ist z. B.

$$\sqrt[n]{a^r} : \sqrt[m]{b^x} = \sqrt[mn]{\frac{a^{rm}}{b^{xn}}}.$$

§. 337.

Daß auch bei Potenzen mit gebrochenen Exponenten, wenn ihre Wurzeln einander gleich sind, die Division durch Subtraction der Exponenten geschieht (wie im §. 314) läßt sich durch Hülfe des vorstehenden Satzes folgendermaßen zeigen. Es ist

a

$$a^{\frac{n}{r}} : a^{\frac{m}{q}} = a^{\frac{n}{r}-\frac{m}{q}} = a^{\frac{nq-mr}{rq}};$$

denn

$$a^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{a^n}$$

$$a^{\frac{m}{q}} = \sqrt[q]{a^m}, \text{ mithin}$$

$$a^{\frac{n}{r}} : a^{\frac{m}{q}} = \sqrt[r]{a^n} : \sqrt[q]{a^m}$$

$$= \sqrt[rq]{a^{nq} : a^{mr}} = \sqrt[rq]{a^{nq-mr}} = a^{\frac{nq-mr}{rq}}.$$

Da $a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m}} : \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}$,

so gilt nunmehr der Satz für die Division von Potenzen mit einerlei Wurzel ganz allgemein, was für Zahlen auch die Exponenten seyn mögen. (Vergl. §. 304.)

§. 338.

Haben die zu dividirenden Wurzelgrößen Coefficienten, so setzt man den Quotienten dieser dem der Wurzelgrößen wieder als Coefficient vor (erster Abschn. §. 74). Z. B.

$$p\sqrt[n]{a^r} \div q\sqrt[n]{b^m} = \frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a^r}{b^m}}.$$

Auch gilt hier von den Umformungen, welche dadurch gemacht werden können, daß Coefficienten mit unter das Wurzelzeichen, oder daß Factoren, die in der Größe unter demselben stehen, als Coefficienten vor dasselbe gebracht werden, dasjenige, was darüber in den Paragraphen 332 und 333 gesagt ist. So wird z. B.

$$p\sqrt{\frac{a^r}{b^n c^m}} = \frac{p}{b}\sqrt{\frac{a^r}{c^m}}.$$

§. 339.

Eine besonders nützliche und häufig geforderte Verein-

fachung des durch die Division von Wurzelgrößen in einander entstehenden Resultats besteht darin, daß man das Wurzelzeichen ganz aus dem Divisor (oder Nenner) wegschafft, d. h. diesen rational macht. Durch Hülfe der Sätze über die Multiplication und Division von Potenzen findet man leicht die Größe, mit welcher Zähler und Nenner eines Bruchs multiplicirt werden müssen, damit sein Nenner als eine eben so hohe Potenz erscheint, als der Grad einer aus dem Bruche zu ziehenden Wurzel ist. Nämlich: man erhält diese Größe, wenn man den Exponenten des Nenners vom Wurzelgrade subtrahirt, und den Rest zum Exponenten einer Potenz macht, welche mit dem Nenner gleiche Wurzel hat. Nachstehende Formeln enthalten die vorzüglichsten Fälle dieser Umformungen:

1) $$\sqrt[n]{\frac{a^r}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a^r b^{n-1}}}{b}$$

2) $$\sqrt[n]{\frac{a^r}{b^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^r b^m}}{b}$$

3) $$\sqrt[n]{\frac{a^r}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^r b^{n-m}}}{b}$$

4) $$\sqrt[n]{\frac{a^r}{b^{m-n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^r b^{2n-m}}}{b}$$

5) $$\sqrt[n]{\frac{a^r}{pb^m c^x}} = \frac{\sqrt[n]{a^r p^{n-1} b^{n-m} c^{n-x}}}{pbc}$$

6) $$\sqrt[n]{\frac{a^r}{b^{n+m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^r b^{-m}}}{b} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{\frac{a^r}{b^m}}$$

$$= \frac{1}{b}\,\frac{\sqrt[n]{a^r b^{n-m}}}{b} = \frac{\sqrt[n]{a^r b^{n-m}}}{b^2}$$

Es ist leicht einzusehen, daß man auf dieselbe Art statt des Nenners, den Zähler eines Bruchs rational machen könnte.

§. 340.

Sind Dividend und Divisor, oder einer von beiden, zusammengesetzte Größen, unter deren Theilen Wurzelgrößen vorkommen, so wird bei der Anwendung des im ersten Abschnitte vorgeschriebenen allgemeinen Divisions-Verfahrens, auf die von §. 336 bis §. 338 vorgetragenen Sätze Rücksicht genommen. Indessen wird, wenn der Divisor aus Theilen besteht, der Quotient in den wenigsten Fällen entwickelt dargestellt werden können. Erst die Analysis bietet dazu allgemeine Methoden dar.

In speciellen Fällen läßt sich auch ein Divisor oder Nenner, in dessen Theilen Wurzelgrößen vorkommen, auf eine einfache Art rational machen, wodurch oft die Entwickelung des Quotienten gestattet wird. Diese beruht besonders auf den Formeln des §. 335. Z. B.

$$(p + \sqrt[n]{b^r}) : (a + \sqrt{c}) = \frac{(p + \sqrt[n]{b^r})\,(a - \sqrt{c})}{(a + \sqrt{c})\,(a - \sqrt{c})}$$

$$= \frac{(p + \sqrt[n]{b^r})(a - \sqrt{c})}{a^2 - c}.$$

Wenn nun, wie bei bestimmten Zahlen, sich a^2 und c im Nenner vereinigen lassen, so hat man einen einfachen Divisor und kann den Quotienten entwickeln. *)

Erhebung zur Potenz und Wurzelausziehung.

§. 341.

Eine Wurzelgröße wird zu einer beliebigen

*) Beispiele hierüber findet man unter andern in »Meier Hirsch Sammlung von Beispielen ꝛc. aus der Algebra« unter der Rubrik: Rechnung mit Wurzelgrößen d. Division.

Potenz erhoben, indem man die Größe unter dem Wurzelzeichen zu dieser Potenz erhebt, und ihr dann das anfängliche Wurzelzeichen wieder vorsetzt.

Denn die Ordnung, in welcher beides, Potenziirung und Wurzelausziehung, an einer Zahl geschehen, darf verwechselt werden (§. 187.); die Andeutung der Wurzelausziehung kann also bei einer Wurzelgröße wiederum gemacht werden, nachdem die Größe unter dem Wurzelzeichen erst zu der Potenz erhoben ist, zu welcher sie nach vollbrachter Wurzelausziehung erhoben werden sollte. Es ist daher:

$$(\sqrt[n]{a^r})^m = \sqrt[n]{(a^r)^m} = \sqrt[n]{a^{rm}} .$$

Anmerk. Auch bei der Anwendung dieses Satzes ist die Anmerkung zu §. 324 in gewissen Fällen zu berücksichtigen.

§. 342.

Stehen Coefficienten vor dem Wurzelzeichen, so müssen auch diese potenziirt werden (§. 289). Z. B.

$$(p\sqrt[n]{a^r})^m = p^m\sqrt[n]{a^{rm}} \text{ oder auch}$$

$$=\sqrt[n]{p^{mn}a^{rm}} \quad (§. 332.)$$

§. 343.

Aus einer Wurzelgröße wird wiederum die Wurzel eines gewissen Grades gezogen, indem man statt ihres Wurzelgrades das Product desselben in den der aufs Neue auszuziehenden Wurzel zum Wurzelgrade nimmt. Es ist:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^r}} = \sqrt[nm]{a^r} .$$

Denn die Wurzelausziehung soll die Potenziirung aufheben; für mehrmalige Potenziirungen durfte aber eine einzige substituirt werden, bei welcher der Exponent ein Product der Exponenten der einzelnen Potenziirungen war (§. 317);

eben so muß es also auch erlaubt seyn, für mehrmalige Wurzelausziehungen eine an die Stelle zu setzen, bei welcher das Product der einzelnen Wurzelgrade den Wurzelgrad ausmacht.

§. 344.

Ist umgekehrt ein Wurzelgrad in Factoren ganzer Zahlen zerlegbar, so kann man eben so viele einzelne Wurzelausziehungen, anstatt der durch ihn angedeuteten, nach und nach vornehmen als er Factoren enthält, wobei die Wurzelgrade gleich diesen Factoren sind. Höhere Wurzelausziehungen können dadurch also oft auf niedere zurückgeführt werden. Z. B.

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}.$$

§. 345.

Wenn die Wurzelgrößen Coefficienten haben, so muß bei einer neuen Wurzelausziehung auch aus diesen die Wurzel gezogen werden. (§. 297). Z. B.

$$\sqrt[n]{p\sqrt[m]{a^r}} = \sqrt[n]{p}\sqrt[nm]{a^r},$$

$$\text{oder auch} = \sqrt[nm]{p^m a^r} \quad (\text{§. } 329).$$

§. 346.

Die beiden Sätze über Potenziirung und Wurzelausziehung der §§. 341 und 343 liefern selbst wieder eine zweite Methode für die Ausführung eben dieser Operationen an Wurzelgrößen. Da nämlich die Wurzelausziehung die Erhebung zur Potenz aufhebt und umgekehrt, so muß nach §. 341

1) Division des Exponenten der Größe unter dem Wurzelzeichen, Ausziehung der Wurzel aus der Wurzelgröße; und nach §. 343

2) Division des Wurzelgrades, Potenziirung der Wurzelgröße seyn. Z. B.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^r}} = \sqrt[n]{a^{r:m}}$$

$$(\sqrt[n]{a^r})^m = \sqrt[n:m]{a^r}$$

Es ist klar, daß dies Verfahren aber nur in den Fällen anwendbar ist, in welchen die Divisionen der Exponenten und Wurzelgrade ganze Zahlen hervorbringen, alsdann aber auch dem in §. 341 und in §. 344 angegebenen vorzuziehen seyn wird, weil dadurch kleinere Zahlen entstehen.

§. 347.

Es ist $(\sqrt[n]{a^r})^m = \sqrt[n]{a^{rm}}$ (§. 341);

da aber $\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}}$, und $\sqrt[n]{a^{rm}} = a^{\frac{rm}{n}}$,

so ist auch $\left(a^{\frac{r}{n}}\right)^m = a^{\frac{rm}{n}} = a^{\frac{r}{n}.m}$

Also, auch wenn der Exponent einer Potenz ein Bruch ist, geschieht die neue Potenziirung derselben durch Multiplication ihres Exponenten mit dem dieser neuen Potenziirung.

§. 348.

Es ist $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^r}} = \sqrt[nm]{a^r}$ (§. 343).

Da aber $\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}}$, und $\sqrt[nm]{a^r} = a^{\frac{r}{nm}}$

so ist auch $\sqrt[m]{a^{\frac{r}{n}}} = a^{\frac{r}{nm}} = a^{\frac{r}{n}:m}$.

Die Wurzelausziehung aus einer Potenz geschieht also, auch wenn ihr Exponent ein Bruch ist, durch Division desselben durch den Wurzelgrad.

Durch die beiden letzten Sätze ist nun der Beweis vollständig, daß alle Regeln für die Rechnungsarten mit Potenzen gültig sind, die Exponenten mögen einen Werth haben, welchen sie wollen. (Vergl. §. 304).

§. 349.

Der allgemeine Ausdruck einer unmöglichen Wurzelgröße:

$\sqrt[2n]{-a}$, kann auf die Form:

$b\sqrt[n]{\sqrt{-1}}$ zurückgeführt werden.

Denn es ist $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a\cdot(-1)}$, weil jede negative Größe als eine gleich große positive multiplicirt in -1 angesehen werden kann. Nun ist ferner:

$$\sqrt[2n]{a\cdot(-1)} = \sqrt[2n]{a}\,.\,\sqrt[2n]{-1} \quad (\S.\ 297).$$

Für die Größe $\sqrt[2n]{a}$ kann aber ein einfaches Zeichen z. B. b gesetzt werden, um im Gegensatze mit einem unmöglichen Werthe anzudeuten, daß der ihrige reel ist, wenn er auch in den meisten Fällen als der eines Irrational-Ausdrucks nur annäherungsweise zu bestimmen seyn wird. So enthält also der Ausdruck: $b\sqrt[2n]{-1}$ dasselbe, welches anfänglich durch den: $\sqrt[2n]{-a}$ gegeben war. Endlich ist nach §. 344

$$b\sqrt[2n]{-1} = b\sqrt[n]{\sqrt{-1}}.$$

§. 350.

Hieraus ist zu ersehen, daß die Unmöglichkeit, worauf die Ausziehung der Wurzel eines geraden Wurzelexponenten aus einer negativen Zahl führt, jedesmal auf die Unmöglichkeit zurückkommt, welche bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus -1 eintritt. Denn, wenn in dem Ausdrucke:

$$b\sqrt[n]{\sqrt{-1}},$$

n eine ungerade Zahl ist, so wird $\sqrt[n]{\sqrt{-1}}$, sofern nur $\sqrt{-1}$ realisirt werden könnte, ebenfalls (wenigstens annäherungsweise) bestimmbar seyn. Ist aber n eine gerade Zahl und man wollte annehmen $\sqrt{-1}$ würde etwas Negatives, so wäre mit dem Ausdrucke $\sqrt[n]{\sqrt{-1}}$, welchen wir nun etwa durch: $\sqrt[2r]{-x}$ vorstellen könnten, dieselbe Zurückführung wie vorhin mit dem $\sqrt[2n]{-a}$ vorzunehmen; wodurch man sich aber-

mals überzeugen würde, daß die Unmöglichkeit an der Ausziehung der Quadratwurzel aus —1 haftete. Durch die Fortsetzung dieser Betrachtung gelangt man aber auf jeden Fall, welche gerade Zahl 2n auch anfangs bedeuten mochte, dahin, daß in $b\sqrt[n]{\sqrt{-1}}$ entweder n ungerade oder gleich 2 wird; so daß also eine fortgesetzte Zurückführung wie vorhin, immer die ausgesprochene Behauptung bestätigen wird.

Die Behandlung eines Ausdrucks wie $b\sqrt{-1}$ ist aus diesem Grunde für die Rechnung mit unmöglichen Wurzelgrößen von besonderer Erheblichkeit, und wegen der vielfältigen Anwendungen, die davon in der höhern Algebra gemacht werden, wird es nützlich seyn, hier noch die beiden folgenden Sätze darzustellen.

§. 351.

Jede gerade Potenz der unmöglichen Wurzelgröße $\sqrt{-1}$ wird eine reelle Größe.

Denn es ist:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1 \text{ (§. 333. Anmerk.)};$$
$$(\sqrt{-1})^4 = ([\sqrt{-1}]^2)^2 = (-1)^2 = +1;$$
$$(\sqrt{-1})^6 = (\sqrt{-1})^4 \cdot (\sqrt{-1})^2 = (+1)(-1) = -1$$

u. s. w.

Allgemein ist:

$$(\sqrt{-1})^{2n} = ([\sqrt{-1}]^2)^n = (-1)^n;$$

wenn n eine gerade Zahl ist, so wird dies gleich + 1, und wenn n ungerade ist, wird es gleich —1.

Die successiven geraden Potenzen von $\sqrt{-1}$ werden also negativ anfangend, abwechselnd positiv und negativ.

§. 352.

Jede ungerade Potenz der unmöglichen Wurzelgröße $\sqrt{-1}$ wird wiederum eine imaginaire Größe.

Denn es ist:

$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1};$$
$$(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4 \cdot \sqrt{-1} = +\sqrt{-1}.$$

Allgemein ist:

$$(\sqrt{-1})^{2n+1} = (\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} \quad (\text{§. 313. Nr. 2.})$$
$$= (-1)^n \cdot \sqrt{-1}.$$

Auch die successiven ungeraden Potenzen der Wurzelgröße $\sqrt{-1}$ werden also abwechselnd positiv und negativ, und wenn man die erste Potenz dabei mitrechnen will, fangen sie mit dem positiven Werthe an.

Achtes Capitel.

Von den Logarithmen.

§. 353.

Bei der Berechnung der Zahlen, welche zu Exponenten einer angenommenen Wurzel gemacht werden müssen, um gegebene Potenzen der letztern hervorzubringen, der dritten Aufgabe, wozu der Begriff von Potenz Veranlassung giebt, (§. 179) werden für die Namen Exponent und Potenz, die: Logarithme und Zahl gesetzt, und die Wurzel pflegt beinahe ausschließlich dabei die Basis (Grundzahl) genannt zu werden.

Es wird sich zeigen, daß wenn nur für irgend eine Wurzel oder Basis die Exponenten bestimmt werden können, welche gegebenen Potenzen derselben entsprechen, diese Aufgabe auch für jede andere Wurzel zu lösen seyn wird.

§. 354.

Logarithme einer Zahl ist demnach der Exponent, welcher einer angenommenen Basis gegeben

werden muß, um diese Zahl als Potenz von ihr hervorzubringen.

Wenn x der Logarithme der Zahl z für die Basis B bedeutet, welches man schreibt:

$$\log.\ z\ \text{bas.}\ B = x\ (\text{logarithmus}\ z\ \text{baseos}\ B\ \text{aequal}\ x).$$

so heißt dies jener Erklärung zufolge:

$$B^x = z.$$

Der eine dieser Ausdrücke kann daher immer für den andern gesetzt werden.

§. 355.

Ein logarithmisches System entsteht, wenn die Logarithmen aller Zahlen für eine und dieselbe Grundzahl berechnet und zusammengestellt werden. Dabei verlangt man also, alle Zahlen als Potenzen einer angenommenen Wurzel darzustellen. Aus den im Vorhergehenden abgeleiteten Beziehungen zwischen Potenz und Wurzel kann man aber schon im Voraus schließen, daß sich diese Aufgabe bei manchen Zahlen gar nicht, und bei vielen nur dann wird lösen lassen, wenn man sich mit einer Annäherung begnügen will.

§. 356.

Was zuvörderst die Wahl einer Basis betrifft, so ist es leicht einzusehen, daß man eine positive Zahl dazu nehmen wird. Denn die Potenzen einer negativen Wurzel werden abwechselnd bald positive bald negative Zahlen (§§. 287. 288); sie bilden also auf keiner Seite (weder auf der positiven noch auf der negativen) eine fortlaufende Reihe von Zahlen zwischen deren Werthen übrige mögliche Zahlen derselben Art enthalten seyn könnten.

Da ferner die Potenzen eines Bruchs wieder Brüche sind, und aus denen ganzer Zahlen hergeleitet werden können,

so nehmen wir zuerst eine ganze positive Zahl als Basis eines Logarithmen-Systems an, und wollen nun untersuchen, für welche Zahlen sich in einem solchen Systeme Logarithmen angeben lassen.

§. 357.

Jede Potenz einer positiven Wurzel wird positiv, man mag zum Exponenten eine positive oder negative, eine ganze oder gebrochene Zahl annehmen. Denn es ist

$$a^n = + a^n;$$

$$a^{-n} = + \frac{1}{a^n};$$

$$a^{\frac{p}{q}} = + \sqrt[q]{a^p}.$$

Bei der Wurzelausziehung in dem letzten Ausdrucke ist nämlich der positive Werth zu nehmen, wenn auch q eine gerade Zahl seyn sollte; denn a^p soll hier durch Potenziirung einer positiven Zahl entstanden, angenommen werden.

Hieraus folgt, daß negative Zahlen nicht als Potenzen einer positiven Wurzel angesehen werden können, oder sich doch wenigstens keine Zahl angeben läßt, die alsdann der Exponent dieser Potenz seyn könnte; mit andern Worten, daß es keine Logarithmen für negative Zahlen giebt, wenn die Basis positiv ist.

Anmerkung. Die Frage, ob für negative Zahlen überall keine Logarithmen anzugeben sind, läßt sich in der Analysis vollständiger beantworten. In ihr wird gezeigt, daß allerdings ein Ausdruck als Logarithme einer negativen Zahl aufgestellt werden kann, dieser aber allemal mit dem unmöglichen Factor $\sqrt{-1}$ behaftet ist.

§. 358.

Bildet man von einer und derselben Wurzel zwei Potenzen, deren Exponenten ganze um eine Einheit verschiedene Zahlen sind, so werden zwischen diesen Potenzen mehrere

ganze Zahlen liegen, von welchen die meisten keine genau bestimmbare Potenzen jener Wurzel sind, weil für ihre Exponenten nur Brüche übrig blieben, die größtentheils auf Irrationalitäten führen würden. Gewiß werden aber alle die zwischen den erwähnten beiden Potenzen liegenden Zahlen keine völlig zu bestimmende Potenzen der Wurzel seyn, wenn diese so angenommen wird, daß sie selbst keiner Zerfällung in irgend eine Anzahl gleicher Factoren fähig ist. Es sey eine solche Basis a, so daß

$$a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \text{ u. s. w.}$$

Zahlen darstellen, welche als successive Potenzen ganzer Exponenten jederzeit berechnet werden können. Nimmt man nun einen zwischen zwei benachbarten Exponenten, z. B. zwischen 4 und 5 liegenden Bruch, etwa $4\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$ als Exponent der Zahl a an, so entsteht die Potenz $a^{\frac{13}{3}} = \sqrt[3]{a^{13}}$, welches ein Irrational-Ausdruck seyn wird; denn es ist $\sqrt[3]{a^{13}} = \sqrt[3]{a^{12}.a} = a^4\sqrt[3]{a}$, und $\sqrt[3]{a}$ ist angenommener Maaßen irrational. Ganz allgemein mag ein, zwischen zwei um eine Einheit verschiedenen ganzen Zahlen liegender, Bruch durch $\frac{n}{m}$ vorgestellt werden, so ist $\sqrt[m]{a^n}$ sicher irrational, wenn, wie es hier angenommen werden muß, m nicht in n aufgeht; denn in welche Factoren man die Potenz a^n auch zerfällen mag, so wird dabei wenigstens einer übrig bleiben, woraus sich nicht die Wurzel des mten Grades ziehen läßt, indem, wenn $\sqrt[m]{a}$ irrational ist, auch

$$\sqrt[m]{a^2} = \sqrt[m]{a\,.\,a} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{a};$$
$$\sqrt[m]{a^3} = \sqrt[m]{a\,.\,a^2} = \sqrt[m]{a^2}\,.\,\sqrt[m]{a},$$

u. s. w.

irrational seyn wird.

Hieraus folgt also, daß auch sehr viele ganze positive Zahlen keine Potenzen einer angenommenen Wurzel seyn können, oder welches dasselbe ist, daß sich in jedem Logarithmen-Systeme für sehr viele positive Zahlen keine Logarithmen angeben lassen.

§. 359.

Annäherungsweise können aber für solche positive Zahlen die Logarithmen berechnet werden, die keine eigentliche Potenzen der Basis sind. Dies erhellt schon daraus, daß ein Irrational-Ausdruck annäherungsweise durch eine bestimmte Zahl dargestellt werden kann. Um ein gewisses Verfahren dafür näher anzugeben, ist folgender Satz erforderlich.

§. 360.

Zwischen zwei bekannten Potenzen einer Zahl a, deren Exponenten p und q an Größe verschiedene Zahlen sind, läßt sich jedesmal eine dritte Potenz von a einschalten, deren Werth aus denen der erstern, wenigstens annäherungsweise, zu berechnen ist.

Nimmt man den halben Unterschied, $\frac{1}{2}(p - q)$ der Exponenten p und q, wobei p größer als q gedacht werden soll, und addirt diesen zu dem kleinern Exponenten, so entsteht eben die Zahl, welche herauskommt, wenn man ihn von dem größern subtrahirt; denn es ist:

$$q + \frac{p - q}{2} = \frac{2q + p - q}{2} = \frac{q + p}{2},$$

und auch:

$$p - \frac{p - q}{2} = \frac{2p - p + q}{2} = \frac{p + q}{2}.$$

Diese Zahl muß also von beiden Exponenten gleich weit abstehen, oder zwischen beiden in der Mitte liegen. Macht man sie zum Exponenten derselben Wurzel, so entsteht die Potenz: $a^{\frac{p+q}{2}}$, welche ebenfalls zwischen die bekannten Potenzen a^p

und a^q fällt, und ihr Werth läßt sich durch die Werthe dieser ausdrücken. Da nämlich

$$a^{p+q} = a^p \cdot a^q \text{ (§. 313) und}$$

$$a^{\frac{p+q}{2}} = \sqrt{a^{p+q}} = \sqrt{a^p \cdot a^q} \text{ (§. 320),}$$

so sieht man, daß die Quadratwurzel aus dem Producte der bekannten Potenzen den Werth einer neuen darstellt, deren Exponent zwischen den Exponenten jener in der Mitte liegt.

§. 361.

Dieser Satz läßt sich auf folgende Art zur annähernden Berechnung von Logarithmen anwenden.

Es sey z die Zahl, deren Logarithme für die Basis B berechnet werden soll, und die keine Potenz dieser Größe (B) ist; sie liege zwischen den in ihren Exponenten um 1 verschiedenen, genau zu bestimmenden, Potenzen B^n und B^m, so liegt ihr Logarithme zwischen n und m, welche Zahlen die ersten Grenzen desselben sind. Nun kann die Potenz $B^{\frac{n+m}{2}} = \sqrt{B^n B^m}$, entweder größer oder kleiner als z seyn, also diese Zahl entweder zwischen B^n und $B^{\frac{n+m}{2}}$, oder zwischen B^m und $B^{\frac{n+m}{2}}$, ihr Logarithme mithin entweder zwischen n und $\frac{n+m}{2}$, oder zwischen m und $\frac{n+m}{2}$ liegen. Schaltet man alsdann aufs Neue zwischen diejenigen Potenzen von B, zwischen welchen z jetzt liegt, eine mittlere Potenz ein, so bekommt man dadurch noch engere Grenzen für die Zahl z und zugleich für ihren Logarithmen. Es ist klar, daß durch Fortsetzung dieses Verfahrens die Zahl z zweien Potenzen von B immer näher gebracht werden kann, zwischen denen sie selbst liegt. Und so wird in eben dem Maaße,

als die Exponenten dieser einander sehr nahe liegenden Potenzen übereinstimmen, auch der Logarithme von z genau dargestellt seyn.

Anwendung hiervon auf die annähernde Berechnung des Logarithmen einer Zahl für die Basis 10.

§. 362.

So ist nunmehr dargethan, daß für eine bestimmte Basis die Logarithmen aller positiven ganzen Zahlen, wenn auch größtentheils nur annäherungsweise, berechnet werden können.

Die Logarithmen der Brüche sind, wie die Folge lehren wird, durch die ihrer Zähler und Nenner gegeben. (Siehe §. 374).

Anmerkung. Die Analysis leitet zur Berechnung der Logarithmen kürzere und bequemere Methoden ab, als die im vorhergehenden §. angezeigte. Aber es soll auch diese hier nur dazu dienen, die Möglichkeit zu beweisen, für jede Zahl wenigstens annäherungsweise den Logarithmen anzugeben.

§. 363.

Folgende Sätze fließen noch leicht aus der Erklärung von Logarithmen, und aus den bekannten Beziehungen zwischen Wurzel und Potenz.

1) In jedem Systeme ist der Logarithme der Basis gleich 1, und der Logarithme der Einheit gleich 0. Denn es ist:

$$B^1 = B, \text{ und } B^0 = 1.$$

2) Die Einheit kann nicht als Basis eines Logarithmen-Systems angenommen werden, denn alle Potenzen von 1 sind wieder gleich 1 (§. 191).

3) Für eine Basis, die größer als 1 ist, entsprechen größern Zahlen auch größere Logarithmen und umgekehrt; denn bei einer solchen Basis wächst mit dem Exponenten die Größe der Potenz.

§. 364.

In dem gebräuchlichen Logarithmen-Systeme, worin die Logarithmen aller Zahlen berechnet und in Tafeln zusammengestellt sind, ist die Grundzahl 10. Diese Logarithmen werden gemeine, auch Briggische Logarithmen genannt. (Letzteres von einem englischen Mathematiker Brigg, welcher sich mit Berechnung der Logarithmen beschäftigte.)

Wenn man schlechthin log. vor eine Zahl schreibt, wird (wenigstens in der reinen Mathematik) der gemeine Logarithme derselben darunter verstanden. Z. B.

$\log. z = x$, heißt: $10^x = z$.

Da, wo eine Unterscheidung nöthig ist, schreibt man, um dieses System anzudeuten, log. vulg. (logarithmus vulgaris) oder auch log. Brigg. (logarithmus Briggianus).

§. 365.

Die successiven Potenzen der Zahl 10, als

$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1000$
$10^4 = 10000$
u. s. w.

zeigen, daß die Logarithmen der höhern Einheiten mit deren Rang übereinstimmen.

Der Logarithme jeder andern Zahl kann nur annäherungsweise angegeben werden, weil genau zu bestimmende Potenzen der Zahl 10 immer höhere Einheiten oder das Umgekehrte derselben $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ werden. Ein besonderer Vortheil, den aber dabei die Basis 10 gewährt, ist, daß man aus dem bloßen Anblicke jeder ganzen Zahl sogleich die beiden bestimmbaren Potenzen der Zahl 10, zwischen welchen sie

sie liegt, und dadurch also auch die Grenzen ihres Logarithmen in ganzen Zahlen erkennen kann. Denn jede ganze Zahl liegt zwischen zwei höhern Einheiten, wovon die kleinere vom Range der höchsten Ziffer dieser Zahl, die größere von einem um eins höhern Range ist. Ihr Logarithme muß mithin gleich der ganzen Zahl, die so groß als der Rang jener erstern höhern Einheit ist, plus einem ächten Bruche seyn. (§. 363. Nr. 3.) Z. B. die Zahl 5638 liegt zwischen $1000 = 10^3$, und $10000 = 10^4$; ihr Logarithme also zwischen 3 und 4.

§. 366.

Die ganze Zahl, woraus der Logarithme einer Zahl besteht, heißt die Kennziffer oder Characteristik, und der ächte Bruch, welcher gewöhnlich in der Form eines Decimalbruchs der Kennziffer beigefügt wird, die Mantisse des Logarithmen.

Aus dem vorigen §. folgt, daß die Characteristik eines gemeinen Logarithmen allemal gleich dem Range der höchsten Ziffer der zugehörigen Zahl ist.

Einrichtung der logarithmischen Tafeln — wie darin der Logarithme jeder Zahl, und zu einem Logarithmen die zugehörige Zahl gefunden wird.

§. 367.

Durch Hülfe eines einmal berechneten Logarithmen-Systems können die Logarithmen für eine beliebige andere Basis folgendermaßen abgeleitet werden.

Es sey der Logarithme der Zahl z für die Basis B durch die gemeinen Logarithmen auszudrücken, so setze man:

1) log. z bas. B = x oder $B^x = z$;

und nehme an, daß:

2) log. vulg. z = n oder $10^n = z$, und

3) log. vulg. B = m oder $10^m = B$

seyn, so ist aus der letzten Annahme:

$(10^m)^x = B^x$ d. h. $10^{mx} = B^x$.

Aus 1 war aber auch:

$z = B^x$, mithin ist

$10^{mx} = z$; und da aus 2,

$10^n = z$, so hat man:

$10^{mx} = 10^n$. In dieser Gleichung sind zwei Potenzen von einerlei Wurzel gleich gesetzt; es müssen also nothwendig auch die Exponenten dieser Potenzen gleich seyn, oder es folgt daraus:

$$mx = n, \text{ und daher } x = \frac{n}{m}.$$

Indem hierin nun für x, n und m die Werthe aus 1, 2 und 3 zurückgesetzt werden, bekommt man:

$$\text{log. z bas. B} = \frac{\text{log. vulg. z}}{\text{log. vulg. B}} \text{ d. h.}$$

um den Logarithmen einer Zahl für eine gewisse Basis auszudrücken, dividire man den Logarithmen der Zahl aus dem bekannten Systeme durch den Logarithmen der Basis, worauf man ihn beziehen will, aus diesem Systeme.

§. 368.

Durch diesen Satz und durch diejenigen, welche die mögliche Berechnung der Logarithmen aller Zahlen für eine gewisse Basis zeigten, ist die Aufgabe gelöst: den Exponenten einer angenommenen Wurzel zu finden, damit ihre Potenz einer gegebenen Zahl gleich werde.

Frägt man z. B., welches der Exponent x einer Zahl a sey, damit der berechnete Werth dieser Potenz (a^x) gleich der Zahl p werde, oder soll in der Gleichung

$a^x = p$ die Größe x bestimmt werden, so hat man nach dem vorigen §.:

$\log. p \text{ bas. } a = x = \frac{\log.\text{ vulg. } p}{\log.\text{ vulg. } a}$; und insoweit wie die gemeinen Logarithmen der Größen p und a anzugeben sind, kann nun auch die Größe x bestimmt werden.

Anwendung der Logarithmen.

§. 369.

Nicht allein zur Auflösung der eben erwähnten Aufgabe dient ein berechnetes Logarithmen-System; sondern der Gebrauch der Logarithmen gewährt überhaupt in vielen Rechnungsarten, vorzüglich bei Potenziirungen und Wurzelausziehungen, große Abkürzungen, wie die nachfolgenden Sätze zeigen werden.

§. 370.

Der Logarithme eines Products ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Factoren. Es ist:

$$\log. ab = \log. a + \log. b.$$

Der Beweis dieses Satzes geht aus der Lehre von den Potenzen hervor; denn Logarithmen sind nichts anders als Exponenten für einerlei Wurzeln, und die zugehörigen Zahlen deren Potenzen; soll das Product der Zahlen also wieder als Potenz derselben Wurzel erscheinen, so müssen die Exponenten addirt werden (§. 308). Auf folgende Art kann dies noch näher dargestellt werden. Es sey:

$\log. a = n$, also $10^n = a$, und

$\log. b = m$, also $10^m = b$, so ist durch Multiplication auf beiden Seiten

$10^{n+m} = ab$, oder dies logarithmisch ausgedrückt,

$n + m = \log. ab$;

für n und m die angenommenen Werthe zurückgesetzt, giebt:

$\log. a + \log. b = \log. ab$, welches zu beweisen war.

§. 371.

Um daher zwei Zahlen durch Hülfe der Logarithmen in einander zu multipliciren, nehme man aus den Logarithmen-Tafeln den Logarithmen jeder derselben, addire diese, und suche zur erhaltenen Summe als Logarithmen die zugehörige Zahl, so ist sie das Product der gegebenen Zahlen.

Dieser Satz zeigt auch, daß nur die Logarithmen der Primzahlen ursprünglich berechnet werden mußten. Aus ihnen finden sich die der zusammengesetzten Zahlen durch bloße Addition. Z. B.

$$\log. 6 = \log. 2 + \log. 3.$$

§. 372.

Der Logarithme eines Quotienten ist gleich dem Logarithmen des Dividends, von dem der Logarithme des Divisors subtrahirt ist. Es ist:

$$\log. \frac{a}{b} = \log. a - \log. b\ .$$

Denn es sey, wie vorhin:

$\log. a = n$, also $10^n = a$, und

$\log. b = m$, also $10^m = b$;

so ist durch Division auf beiden Seiten:

$$10^{n-m} = \frac{a}{b} \text{ d. h.}$$

$$n - m = \log. \frac{a}{b}, \text{ oder}$$

$$\log. a - \log. b = \log. \frac{a}{b}.$$

§. 373.

Die Division zweier Zahlen kann hiernach durch Hülfe der Logarithmen folgendermaßen geschehen: man nimmt aus den Tafeln den Logarithmen des Dividends und den des Divisors, zieht letztern vom erstern ab, und bestimmt die zu diesem

Unterschiede als Logarithmen zugehörige Zahl, so ist sie der gesuchte Quotient.

§. 374.

Da Bruch und Quotient gleichbedeutend sind, so erhellt jetzt, wie die Logarithmen der Brüche durch die der ganzen Zahlen gegeben sind: man subtrahire den Logarithmen des Nenners vom Logarithmen des Zählers, so ist die Differenz gleich dem Logarithmen des Bruchs.

Der Logarithme eines ächten Bruchs wird also, vorausgesetzt, daß die Basis des Logarithmen-Systems kein ächter Bruch, sondern größer als 1 ist, eine negative Zahl, weil zu seiner Bestimmung das Größere (der Logarithme des Nenners) vom Kleinern (dem Logarithmen des Zählers) abgezogen werden muß. Umgekehrt wird ein negativer Logarithme allemal einem ächten Bruche als zugehöriger Zahl entsprechen.

§. 375.

Wenn $x = \log. a$, so ist

$$-x = \log. \frac{1}{a}.$$

Denn aus der Annahme folgt:

$$10^x = a; \text{ da nun}$$

$$10^{-x} = \frac{1}{10^x}, \text{ so ist auch}$$

$$10^{-x} = \frac{1}{a} \text{ oder}$$

$$-x = \log. \frac{1}{a}.$$

Dieser Satz kann dazu dienen, aus den Logarithmen-Tafeln, worin nur positive Logarithmen stehen, die einem negativen Logarithmen zugehörige Zahl zu bestimmen; man

sieht ihn nämlich als positiv an, und setzt die ihm zugehörige Zahl als Nenner eines Bruchs, der die Einheit zum Zähler hat.

§. 376.

Bei der Bestimmung des gemeinen Logarithmen eines Decimalbruchs hat man eine besondere Erleichterung dadurch, daß der Logarithme des Nenners, als der einer höhern Einheit, sogleich bekannt, und zwar eine ganze Zahl gleich der Anzahl der Decimalstellen ist. Man hat daher nur nöthig, von der Characteristik des Logarithmen des Zählers eben so viele Einheiten hinwegzunehmen, als der Rang des Nenners enthält. Ist aber, wegen der Beschaffenheit des Zählers, die Characteristik seines Logarithmen nicht so groß, daß sich dies Wegnehmen ganz ausführen ließe, so setzt man, nachdem so viele als die Characteristik ausmacht, wirklich davon genommen sind, die noch übrig bleibenden Einheiten als negativ hinter die Mantisse jenes Logarithmen, und behält ihn so als eine zweitheilige Größe in Rechnungen bei. Z. B.

$$\log. 0{,}0056 = \log. 56 - \log. 10000 = \log. 56 - 4;$$

die Tafeln geben:

$$\log. 56 = 1{,}7481880;$$

daher ist

$$\log. 0{,}0056 = 0{,}7481880 - 3.$$

Das Verfahren bei der Bestimmung der zugehörigen Zahl eines Logarithmen, welcher negative Einheiten hinter sich hat, ergiebt sich von selbst; denn die negativen Einheiten bedeuten Division dieser Zahl durch eine höhere Einheit des Ranges, welcher gleich der Anzahl dieser negativen Einheiten ist.

Anwendung hiervon zur Vermeidung durchaus negativer Logarithmen — warum mit solchen, deren zweiter Theil eine negative

ganze Zahl ist, bequemer gerechnet wird, als mit denen, die auch in der Mantisse negativ sind. Bestimmung des Logarithmen eines gemeinen ächten Bruchs hiernach.

§. 377.

Der Logarithme einer Potenz ist gleich dem Logarithmen ihrer Wurzel, multiplicirt mit dem Exponenten der Potenz. Es ist:

$$\log. a^m = m \log. a.$$

Auch dieser Satz folgt unmittelbar aus den Regeln für die Rechnungsarten mit Potenzen, und zwar aus der für die Potenziirung einer Potenz (§. 317). Er kann aber auch nach Anleitung der Paragraphen 370 und 372 so bewiesen werden: Es sey

$\log. a = n$, also $10^n = a$,

so ist $(10^n)^m = a^m$, oder $10^{nm} = a^m$, d. h.

$\log. a^m = nm = m \log. a$.

§. 378.

Hieraus ergiebt sich die Art, eine Zahl durch Hülfe von Logarithmen zur Potenz zu erheben:

man multiplicirt den Logarithmen dieser Zahl mit dem Exponenten der Potenz, auf die sie erhoben werden soll, so ist die diesem Producte als Logarithmen entsprechende Zahl gleich der gesuchten Potenz.

Da Potenziirungen bei hohen Exponenten durch unmittelbares Multiplications-Verfahren sehr weitläufige Rechnungen verursachen, so ist hierbei der Gebrauch der Logarithmen sehr vortheilhaft.

§. 379.

Der Logarithme einer Wurzelgröße ist gleich dem Logarithmen der Größe unter dem Wurzelzeichen, dividirt durch den Grad der auszuziehenden Wurzel. Es ist:

$$\log. \sqrt[m]{a} = \frac{\log. a}{m}.$$

Da jede Wurzelgröße als eine Potenz dargestellt werden kann, so folgt der Beweis dieses Satzes schon aus dem vorhergehenden; man hat nämlich

$$\log. \sqrt[m]{a} = \log. a^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\log. a = \frac{\log. a}{m}.$$

Ursprünglich, wie dort, kann er indessen dadurch geführt werden, daß man aus

$10^n = a$ durch Wurzelausziehung des mten Grades folgert:

$10^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a}$; mithin wird

$\frac{n}{m} = \log. \sqrt[m]{a}$, oder da vermöge der Annahme

$n = \log. a$,

$$\frac{\log. a}{m} = \log. \sqrt[m]{a}.$$

§. 380.

Dieser Satz zeigt einen vorzüglichen Nutzen der Logarithmen; denn die Weitläufigkeiten, welche bei Wurzelausziehungen, besonders solcher von sehr hohen Graden, aus bestimmten Zahlen eintreten, werden dadurch beseitigt. Der angenäherte Werth der gesuchten Wurzel einer Zahl ergiebt sich nach ihm, indem der Logarithme dieser Zahl durch den Wurzelgrad dividirt, und zu diesem Quotienten als einem Logarithmen die zugehörige Zahl bestimmt wird.

Um z. B. $\sqrt[7]{3687}$ zu berechnen, hat man nur nöthig, den Logarithmen der Zahl 3687 aus den Logarithmen-Tafeln zu nehmen, durch 7 zu dividiren, und dazu wieder die zugehörige Zahl in den Tafeln zu suchen.

§. 381.

Durch wiederholte Anwendung der für die Rechnung

mit Logarithmen vorgetragenen Sätze lassen sich ebenfalls zusammengesetzte Ausdrücke durch Logarithmen berechnen.

So ist z. B.

$$\log. \sqrt[n]{a^m} = \frac{m \log. a}{n};$$

$$\log. (ab)^n = n (\log. a + \log. b);$$

$$\log. \sqrt[n]{\frac{(ab)^r}{c}} = \frac{r (\log. a + \log. b.) - \log. c}{n};$$

$$\log. \frac{p\sqrt[n]{a^r}}{q} = \log. p + \frac{r}{n} \log. a - \log. q;$$

$$\log. \frac{(a \pm b)^r}{c^n} = r \log. (a \mp b) - n \log. c;$$

$$\log. \sqrt[m]{\frac{a^x c^r}{b}} = \frac{x \log. a + r \log. c - \log. b}{m},$$

u. dgl. m.

Es ist dabei zu bemerken, daß die Anwendung der Logarithmen zur Berechnung eines aus Theilen bestehenden Ausdrucks unvollkommen bleibt, weil der Logarithme einer aus Theilen bestehenden Größe erst nach der Vereinigung dieser Theile bestimmt werden kann. Es ist z. B.

$$\log. \sqrt[m]{(a + b^x)} = \frac{\log. (a + b^x)}{m}.$$

Will man darin b^x durch Logarithmen berechnen, so muß man zu $x \log. b$ erst wieder die zugehörige Zahl nehmen, um sie mit a vereinigen zu können, und dann von dieser Summe den Logarithmen aufs Neue suchen und ihn durch m dividiren.

Anmerk. Die Anwendung der Logarithmen auf Ausdrücke, die aus Theilen bestehen, wird durch gewisse, von Gauß zuerst berechnete, Tafeln bequem ausführbar, indem man darin aus den Logarithmen zweier Zahlen den Logarithmen

der Summe oder Differenz dieser Zahlen selbst findet. Diese Tafeln sind unter andern in la Lande's Logarithmen-Tafeln mit abgedruckt. (Jerôme de la Lande's logarithmisch-trigonometrische Tafeln, durch die Tafel der Gaußschen Logarithmen und andere Tafeln und Formeln vermehrt. Herausgegeben von H. G. Köhler. Leipzig 1827.)

§. 382.

Wie die Logarithmen endlich zur Auflösung von Gleichungen erforderlich sind, in denen die unbekannte Größe im Exponenten einer Potenz vorkommt, folgt schon aus §. 368. Dasselbe kann jetzt aber noch kürzer folgendermaßen gezeigt werden.

Wenn $a^x = p$, so ist, indem man auf beiden Seiten der Gleichung Logarithmen nimmt,

$$x \cdot \log. a = \log. p \text{ (§. 377), woraus}$$

$$x = \frac{\log. p}{\log. a} \text{ wird.}$$

Auch in zusammengesetztern Fällen lassen sich solche Gleichungen, welche zu denen gehören, die unter dem Namen von transcendenten Gleichungen begriffen werden, durch Anwendung der Logarithmen auflösen; nur muß sich die Gleichung zu dem Ende dahin bringen lassen, daß die unbekannte Größe im Exponenten eines Gliedes steht. Es kommt alsdann darauf an, das Glied, welches die unbekannte Größe enthält, zuvörderst von andern zu befreien, und auf einer Seite der Gleichung allein darzustellen, und erst hierauf die Logarithmen beider Seiten derselben gleich zu setzen. Das Uebrige kommt auf bekannte Regeln der Auflösung einer Gleichung zurück.

Beispiele.

Die unbekannte Größe werde durch das Zeichen x vorgestellt.

1. Es sey die Gleichung:

$$a^x + b = p$$

gegeben, so transponire man b; dies giebt

$$a^x = p - b \text{; dann ist}$$

$$x \log. a = \log. (p - b) \text{, und daraus}$$

$$x = \frac{(\log. p - b)}{\log. a}.$$

2. Aus der Gleichung:

$$\frac{a^{2x+n}}{d} - \frac{b}{c} = p \text{, folgt}$$

$$a^{2x+n} = \left(p + \frac{b}{c}\right) d = \frac{(pc + b)\, d}{c};$$

daher ferner:

$$(2x + n) \log. a = \log. (pc + b) + \log. d - \log. c,$$

und daraus:

$$2x + n = \frac{\log. (pc + b) + \log. d - \log. c}{\log. a},$$

mithin

$$x = \frac{\log (pc + b) + \log. d - \log. c}{2 \log. a} - \frac{n}{2}.$$

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

Erstes Capitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Verhältnisse und Proportionen im Allgemeinen.

§. 383.

Die Vergleichung zweier gleichartiger Größen in Absicht auf die Vielheit ihrer Theile heißt auch die Bestimmung ihres **Verhältnisses**. Wenn diese Vergleichung zweier Größen **angedeutet** wird, so sagt man daher: man habe die Größen mit einander in **Verhältniß** gesetzt, — und nennt sie selbst die **Glieder** des Verhältnisses.

Die arithmetische Operation zur Ausführung einer solchen Vergleichung, besteht entweder in einer **Subtraction**, oder in einer **Division**. Im ersten Falle geht das **arithmetische**, im andern das **geometrische Verhältniß** der verglichenen Größen hervor, welche dabei also durch **Zahlen** ausgedrückt werden müssen.

§. 384.

Die Glieder eines Verhältnisses werden **erstes** und **zweites**, oder **vorhergehendes** und **nachfolgen-**

des Glied desselben genannt, und im arithmetischen Verhältniß durch das Zeichen der Subtraction, im geometrischen durch das Zeichen der Division so verbunden, daß das erste Glied vorangeht. Sie müssen, der Erklärung des vorigen §. gemäß, entweder beide unbenannte, oder beide gleichbenannte Zahlen seyn.

§. 385.

Bei dem arithmetischen Verhältnisse heißt die Größe des Unterschiedes zwischen dem ersten und zweiten Gliede, welche durch die Ausführung der angedeuteten Subtraction gefunden wird, der Denominator des Verhältnisses.

Wenn $a - b = d$,

so ist d der Denominator des arithmetischen Verhältnisses, in welchem die Größen a, und b zu einander stehen.

Es ist demnach ganz einerlei, ob man sich unter dem Ausdrucke $a - b$ ein arithmetisches Verhältniß oder eine angedeutete Subtraction denken will, und Denominator und Rest oder Differenz bedeuten eine und dieselbe Größe.

Auch ist es klar, daß der Donominator mit den Gliedern des Verhältnisses von einerlei Art seyn wird, unbenannt, wenn sie es sind, oder mit ihnen von derselben Benennung, wenn sie benannt sind.

§. 386.

Die Größe des Quotienten, welcher durch ein geometrisches Verhältniß ausgedrückt wird, heißt der Exponent (auch der Name) des Verhältnisses. Aus der Lehre von der Division folgt, daß diese Größe immer eine unbenannte Zahl seyn wird, die Glieder des Verhältnisses mögen selbst unbenannte, oder beide gleichbenannte Zahlen seyn (erster Abschn. §. 64. Nr. 2).

Wenn $a : b = e$, so heißt also e der Exponent des

geometrischen Verhältnisses, in welchem die Größen a und b zu einander stehen, und ist gleichbedeutend mit dem Quotienten dieser Größen.

Anmerk. Da der Ausdruck Exponent schon bei den Potenzen in ganz anderer Bedeutung gebraucht ist als hier, so muß wenigstens der Exponent des Verhältnisses nie schlechthin Exponent, sondern immer Verhältniß-Exponent genannt werden.

Es würde zweckmäßiger seyn, diese Größe ausschließlich mit: Name des Verhältnisses — zu bezeichnen; doch ist jene Benennung einmal mehr gebräuchlich, und indem das Wort »Verhältniß« davor gesetzt wird, kann keine Verwechselung mit der Bedeutung des Exponenten einer Potenz entstehen.

§. 387.

Ein Verhältniß heißt gleichgliedrig, wenn seine Glieder gleich sind; ungleichgliedrig, wenn sie es nicht sind. Bei einem gleichgliedrigen arithmetischen Verhältnisse ist der Denominator gleich Null; bei einem gleichgliedrigen geometrischen Verhältnisse ist der Verhältniß-Exponent gleich der Einheit.

§. 388.

Vier Größen stehen in Proportion, wenn das arithmetische oder geometrische Verhältniß zweier derselben eben so groß ist als das, in welchem die beiden andern stehen.

Die Gleichheit zweier arithmetischer Verhältnisse heißt eine arithmetische, die Gleichheit zweier geometrischer Verhältnisse eine geometrische Proportion.

Die gleichen Verhältnisse werden beim Schreiben einer Proportion durch das Zeichen der Gleichheit mit einander verbunden. Z. B.

$$a - b = c - d$$

ist eine arithmetische Proportion. Sie wird gelesen:

a verhält sich zu b arithmetisch, wie sich c zu d verhält.

$$a : b = c : d$$

ist eine geometrische Proportion. Sie wird gelesen:

a verhält sich zu b geometrisch, wie sich c zu d verhält. Bei dieser Proportion pflegt man indessen das Wort „geometrisch" gewöhnlich wegzulassen, so wie überhaupt, wenn man schlechthin von einer Proportion spricht, allemal eine geometrische darunter verstanden wird.

§. 389.

Eine Proportion besteht also aus vier Gliedern. Diese werden ihrer Stellung nach das erste, zweite, dritte und vierte Glied der Proportion genannt. Außerdem heißen das erste und vierte Glied äußere; das zweite und dritte innere oder mittlere Glieder; das erste und dritte, so wie das zweite und vierte gleichnamige oder gleichliegende Glieder (termini homologi). Das vierte Glied einer Proportion wird auch die vierte (arithmetische oder geometrische) Proportionale zu den im ersten, zweiten und dritten Gliede befindlichen Größen genannt.

§. 390.

Wenn die mittlern Glieder einer Proportion einander gleich sind, so heißt sie eine stetige; wenn dies nicht der Fall ist, so heißt sie eine abgesonderte Proportion. In der stetigen Proportion steht also in den mittlern Gliedern einerlei Größe; diese wird die mittlere (arithmetische oder geometrische) Proportionale zwischen den beiden in den äußern Gliedern stehenden Größen genannt. Das vierte Glied einer solchen Proportion heißt auch die dritte (arithm. oder geometrische) Proportionale zu den im ersten und mittlern Gliede stehenden Größen.

Arithmetische Proportionen.

§. 391.

Sämmtliche Glieder einer arithmetischen Proportion müssen gleichartig seyn, denn sollen die Denominatoren zweier Verhältnisse (die Größen zweier Differenzen) dieselben seyn, welches durch die Gleichsetzung der beiden Verhältnisse, die die Proportion ausmachen, angedeutet wird, so kann dies nur dann angehen, wenn diese Denominatoren auf beiden Seiten auch von einerlei Art sind; daher sind alle Glieder einer arithmetischen Proportion entweder unbenannte oder gleichbenannte Zahlen.

§. 392.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittlern Glieder.

Es sey die Proportion allgemein durch:

$a - b = c - d$ angedeutet; so folgt, indem man sie als eine Gleichung ansieht, durch Transposition der negativen Glieder:

$$a + d = c + b,$$

worin der ausgesprochene Satz enthalten ist.

§. 393.

Durch Auflösung der Gleichung, welche eine arithmetische Proportion zugleich vorstellt, kann man jedes Glied derselben durch die drei übrigen ausdrücken. Nämlich bloß durch Transposition folgt aus $a - b = c - d$:

1. $a = c + b - d,$
2. $d = c + b - a,$
3. $c = a + d - b,$
4. $b = a + d - c,$

d. h. jedes äußere Glied einer arithmetischen Proportion ist gleich der Summe der innern Glie-

Glieder weniger dem andern äußern, und jedes innere Glied ist gleich der Summe der äußern weniger dem andern innern.

Wenn z. B. in der Proportion

$$18 - 15 = 9 - x$$

das vierte Glied (x), oder die vierte arithmetische Proportionale zu 18, 15, 9 gefunden werden soll, so hat man

$$x = 15 + 9 - 18 = 6,$$

und es wird

$$18 - 15 = 9 - 6$$

seyn.

§. 394.

Wird der Satz des §. 392 auf die stetige arithmetische Proportion:

$$a - b = b - c$$

angewandt, so ist

$$2b = a + c, \text{ mithin auch}$$

$$b = \frac{a + c}{2},$$

d. h. das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion ist gleich der halben Summe der äußern Glieder.

Um daher die mittlere arithmetische Proportionale zwischen zwei Zahlen zu finden, muß man diese Zahlen addiren und durch 2 dividiren. Z. B. die mittlere arithmetische Proportionale zwischen 15 und 27 ist:

$$\frac{15 + 27}{2} = 21, \text{ und es wird}$$

$$15 - 21 = 21 - 27 \text{ seyn.}$$

Anmerk. Die Sätze der drei letzten Paragraphen pflegen als Hauptsätze über arithmetische Proportionen aufgestellt zu werden, daher man sie als solche zu bemerken hat, wenn sie auch übrigens aus der Lehre von den einfachen Glei-

chungen an sich klar sind. Ueberhaupt finden die arithmetischen Proportionen wenige Anwendungen; oder diese sind doch übereinstimmend mit denen einer einfachen Gleichung, worin auf jeder Seite die Differenz zweier Zahlen steht. Die mannigfaltigen Veränderungen einzeln aufzuzählen, welche der Form einer solchen Proportion gegeben werden können, ist deßhalb auch überflüssig; sie beruhen lediglich auf den gestatteten Umformungen einer Gleichung, und sind daraus jederzeit verständlich.

Mit den geometrischen Proportionen hat es zwar ein ähnliches Bewandniß: auch ihre Lehre kömmt auf die der einfachen Gleichungen zurück. Es wird aber, wegen des häufigen Vorkommens dieser Formen in allen Theilen der Mathematik (besonders der Geometrie) eine ausführlichere Untersuchung darüber nöthig, als ihre Betrachtung als Gleichungen schon in sich schließen würde. Die daraus hervorgehenden Sätze gewähren, in eigenthümlicher Gestalt aufgefaßt, oft Abkürzungen bei gewissen Darstellungen, und sind auch so allgemein gebräuchlich, daß ihre Kenntniß nicht wohl entbehrt werden kann.

Geometrische Proportionen.

§. 395.

Eine geometrische Proportion entsteht immer, wenn die Vergleichung zweier Größen durch Division dasselbe Resultat giebt, wie eben diese Operation bei zwei anderen Größen. Dazu ist es aber nicht erforderlich, daß in beiden Verhältnissen Größen von einerlei Art vorkommen, indem die Größe des Verhältniß-Exponenten von der Art der Glieder des Verhältnisses unabhängig ist (§. 386). Aus diesem Grunde wird es gut seyn, folgende Formen der geometrischen Proportionen zu unterscheiden:

1) Die Glieder der Proportion können sämmtlich unbenannte Zahlen seyn.

2) Die Glieder des einen Verhältnisses dürfen benannte

Zahlen von einerlei Art, die des andern Verhältnisses unbenannte Zahlen seyn.

3) Alle Glieder der Proportion können benannte Zahlen von einer und derselben Art seyn.

4) Die Glieder des einen Verhältnisses können benannte Zahlen einer gewissen Art, die des zweiten Verhältnisses benannte Zahlen einer andern Art seyn.

Eine stetige geometrische Proportion (§. 390) kann nur die Formen von Nr. 1 und Nr. 3 annehmen, denn sonst kämen nicht gleichartige Glieder in einerlei Verhältnisse vor (§. 383).

Anmerk. Bei den Anwendungen der Proportionen kommt ein Fall vor, in welchem man anscheinend in den Gliedern desselben Verhältnisses Größen von verschiedener Art mit einander vergleicht. Man schreibt z. B.

1 Pistole : 1 rthl. = 5 : 1

Es ist aber klar, daß die Glieder des ersten Verhältnisses dennoch Größen sind, die aus gleichartigen Theilen bestehen; denn sie können beide durch ein gemeinschaftliches Maaß (eine gewisse Münzsorte) gemessen werden; und sie sind beide auf einerlei Einheit reducirt gewesen, indem man die Größe des Verhältniß-Exponenten durch eine Division ausmittelte.

Es dürfen also die Glieder eines geometrischen Verhältnisses, wenn sie nur aus gleichartigen Theilen bestehend gedacht, und darauf zurückgeführt werden können, verschiedene Benennung haben, so lange man ihre Vergleichung nur andeutet. Sobald man aber die in dem Verhältnisse angedeutete Division wirklich ausführen will, müssen sie zuvor auf einerlei Benennung gebracht werden (erster Abschn. §. 64. Nr. 2). In einer Proportion von der zweiten Form ist, wenn die Glieder des einen Verhältnisses derselben jene Beschaffenheit haben, durch das andere Verhältniß die Größe des Verhältniß-Exponenten des ersten angegeben, und gerade dadurch die erwähnte Reduction geschehen, wie z. B. in:

1 Stunde : 1 Minute = 60 : 1 u. dergl. m.

§. 396.

Zwei beliebige geometrische Verhältnisse, welche einem dritten gleich sind, sind auch unter einander gleich, und bringen durch ihre Gleichsetzung eine neue geometrische Proportion hervor.

Wenn $a : b = c : d$
und $p : q = c : d$, so ist auch
$a : b = p : q$

Denn, wenn der Exponent des Verhältnisses
$c : d = e$, so ist auch
$a : b = e$ und
$p : q = e$ (beides wegen §. 395);
mithin $a : b = p : q$.

§. 397.

Man kann für jedes Verhältniß, dessen Glieder beliebige benannte Größen von einerlei Art sind, ein anderes ihm gleiches auffinden, dessen Glieder unbenannte Zahlen sind, und letzteres also (nach dem vorigen §.) für ersteres setzen.

Erscheinen die Glieder des gegebenen Verhältnisses als gleichbenannte Zahlen, so ist in der Lehre der Division gezeigt, daß der Quotient zweier gleichbenannter Zahlen auf dieselbe Art gefunden wird, wie der eben dieser Zahlen ohne Benennung (§§. 66. 67). Die Verhältniß-Exponenten zweier gleichbenannter Zahlen und derselben Zahlen ohne ihre Benennung sind mithin gleich, also auch diese beiden Verhältnisse selbst. (Z. B. 8 rthl. : 5 rthl. = 8 : 5). Man sagt daher auch: gleichbenannte Zahlen sind den unbenannten Zahlen proportional, die ihnen der Größe nach gleich sind.

Sind aber die Glieder eines Verhältnisses gleichartige

Größen, die nicht durch gleichbenannte Zahlen ausgedrückt erscheinen, so müssen sie zuerst durch gewisse Erfahrungssätze über ihre gegenseitige Beziehung, welche häufig durch eine Proportion der zweiten Form des §. 395 ausgesprochen wird (Vergl. auch §. 35) auf einerlei Benennung gebracht werden, und dann tritt der vorige Fall ein. (Z. B. 1 holl. Duc. : 1 Pist. = 3 : 5).

Anmerk. Aus den §§. 395 und 397 erhellt auch, warum zu den Gliedern eines Verhältnisses und einer Proportion beliebige gleichartige Größen gemacht werden können, die vorher gar nicht durch Zahlen ausgedrückt waren, z. B. Linien oder Flächen u. s. w. Wenn a und b zwei Linien, n und m aber Zahlen vorstellen, so sagt die Proportion

$$a : b = n : m$$

»die Linie a verhält sich zur Linie b, beide nach einerlei Maaßstab gemessen (mithin dabei als Zahlen, denen einerlei Einheit zum Grunde liegt, angesehen) wie sich die Zahlen n und m zu einander verhalten.«

Die Lehre von den Proportionen findet aus diesem Grunde in der Geometrie häufige Anwendungen.

§. 398.

Der vorhergehende §. zeigt, daß die Proportionen der dritten und vierten Form allemal auf die der zweiten Form, und auch sammt dieser auf die der ersten Form des §. 395 zurückgeführt werden können. Z. B. die Proportion:

$$n \text{ rthl.} : m \text{ rthl.} = p \text{ ℔} : q \text{ ℔}$$

worin n, m, p und q unbenannte Zahlen sind, kann verändert werden in die:

$$n : m = p \text{ ℔} : q \text{ ℔}$$

und diese wieder in die:

$$n : m = p : q.$$

§. 399.

In jeder geometrischen Proportion, in der

alle Glieder, oder doch die Glieder des einen Verhältnisses unbenannte Zahlen sind, ist das Product der äußern Glieder gleich dem Producte der innern Glieder.

Wenn in der Proportion,

$$a : b = c : d$$

alle Glieder unbenannte Zahlen sind, so folgt schon aus der ihr entsprechenden Gleichung:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

durch Fortschaffen der Divisoren

$$ad = bc.$$

Wenn aber a und b unbenannte, c und d gleichbenannte Zahlen sind, und der Exponent beider Verhältnisse = e gesetzt wird, so ist

$$a : b = e, \text{ also } a = b \cdot e \text{ und}$$
$$c : d = e, \text{ also } d \cdot e = c$$

mithin, da sowohl a als auch be unbenannte, aber $(d \cdot e)$ und c gleichbenannte Zahlen sind,

$$(d \cdot e) \cdot a = c \cdot be,$$

und daraus, indem der Factor e auf beiden Seiten weggelassen wird:

$$d \cdot a = c \cdot b.$$

Man kann also aus jeder Proportion der ersten und zweiten Form des §. 395 eine Producten-Gleichung machen. Und wenn künftig von der Anwendung dieses Satzes bei einer beliebigen Proportion Gebrauch gemacht wird, so muß vorausgesetzt werden, daß sie vorher nach §. 398 auf eine dieser Formen zurückgeführt ist.

§. 400.

Die Proportion: $a : b = c : d$ giebt nach dem vorigen §. $ad = bc$.

Wenn hierin alle vier Größen a, b, c, d unbenannte Zahlen sind, so wird daraus:

$$a = \frac{bc}{d};$$

$$d = \frac{bc}{a};$$

$$b = \frac{ad}{c};$$

$$c = \frac{ad}{b}.$$

Sind aber a und b unbenannte, c und d gleichbenannte Zahlen, so muß man setzen:

$$a = \frac{c}{d} \cdot b;$$

$$d = c \cdot \frac{b}{a};$$

$$b = \frac{d}{c} \cdot a;$$

$$c = d \cdot \frac{a}{b}.$$

Aus je drei bekannten Gliedern einer jeden geometrischen Proportion läßt sich mithin das vierte Glied derselben bestimmen. Denn, wenn die Proportion nicht eine der hier angenommenen Formen hätte, so könnte sie vorher nach §. 398 darauf gebracht werden.

Die Regel für diese Bestimmung geben die vorstehenden Formeln; sie lautet:

Ein äußeres Glied ist gleich dem Producte der innern Glieder, dividirt durch das andere äußere; ein inneres Glied ist gleich dem Producte der äußern, dividirt durch das andere innere.

Steht das unbekannte Glied als viertes Glied der Proportion, so ist hierdurch also auch die Aufgabe gelöst, zu drei Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden (§. 389.)

§. 401.

In der stetigen geometrischen Proportion:

$$a : b = b : c$$

ist $b^2 = ac$ (§. 399),

daher $a = \frac{b^2}{c}$;

$c = \frac{b^2}{a}$ und

$b = \sqrt{ac}$ (§. 239.)

Die letzte Formel zeigt, daß die mittlere geometrische Proportionale zweier Zahlen gleich der Quadratwurzel aus dem Producte dieser Zahlen ist.

§. 402.

Der Satz des §. 399 giebt Gelegenheit, die Größen-Beziehung zwischen den Gliedern einer geometrischen Proportion darzustellen. Es sey die Proportion

$a : b = c : d$, so ist

$ad = bc$;

1) wenn also $a = b$, so muß auch $c = d$,
2) wenn $a = c$, so muß auch $b = d$;
3) wenn $a <> b$, so muß auch $c <> d$,
4) wenn $a <> c$, so muß auch $b <> d$ seyn.

In der stetigen Proportion:

$a : b = b : c$ ist

$b^2 = ac$; mithin

wenn $a > b$, so muß auch $b > c$ seyn; oder die mittlere geometrische Proportionale zwischen zwei Zahlen ist

größer als die eine, und kleiner als die andere dieser Zahlen.

§. 403.

Aus §. 399 folgt ferner, daß jede Producten-Gleichung in eine geometrische Proportion verwandelt werden kann, welche so eingerichtet werden muß, daß das Product ihrer äußern Glieder das eine, das Product ihrer mittlern Glieder das andere der gleichen Producte giebt.

Wenn $ad = bc$, so ist

1) $a : b = c : d$, oder auch

2) $a : c = b : d$.

Sind die Größen a, b, c, d unbenannte Zahlen, so ist es willkührlich, welche von diesen beiden Proportionen man annehmen will; sind aber die Producte ad und bc benannte Zahlen, so müssen diejenigen Factoren, welchen die Benennung beigelegt wird, Glieder desselben Verhältnisses werden; wenn also an c und d die Benennung haften soll, so muß die erste Proportion gewählt werden, und die zweite ist nicht zulässig.

Daß auch, wenn mehr als zwei Factoren auf der einen oder auf beiden Seiten der Producten-Gleichung stehen, aus ihr, wie vorhin, eine geometrische Proportion gebildet werden kann, verdient kaum einer Erwähnung; gewisse Glieder dieser Proportion werden alsdann aus mehreren Factoren bestehen müssen. Eine solche Proportion ist besonders im Falle jene Producte aus unbenannten Zahlen bestehen, mannichfaltiger Gestalten fähig; z. B.

Aus $anb = mcdp$ folgt:

$a : c = mdp : nb$,

$an : md = cp : b$

u. s. w.

Folgende Formen von Producten-Gleichungen verdienen

hinsichtlich der daraus abzuleitenden Proportionen noch bemerkt zu werden:

1) $ab = c^2$ giebt die Proportion:

$$a : c = c : b;$$

2) $a = bc$ giebt die Proportion

$$a : b = c : 1.$$

§. 404.

Die verschiedene Stellung der Glieder in den beiden Proportionen, welche aus derselben Producten-Gleichung in einem gewissen Falle abgeleitet werden konnten (§. 403), führt auf die Untersuchung über die Veränderung einer Proportion durch Verwechselung ihrer Glieder.

Die Gleichheit der Producte ad und bc folgt nach §. 399 aus jeder der folgenden vier Proportionen:

1) $a : b = c : d;$
2) $a : c = b : d;$
3) $d : b = c : a;$
4) $b : a = d : c.$

Also lassen sich auch aus einer dieser Proportionen die andern drei herleiten. Will man diese Veränderungen auf beliebige Proportionen anwenden, so hat man aber noch besondere Rücksichten dabei zu nehmen.

1) Aus der ersten Proportion

$$a : b = c : d$$

folgen die drei übrigen unbedingt, wenn alle Glieder unbenannte Zahlen oder benannte Größen von einerlei Art sind; denn, nachdem im letzten Falle die Proportionen auf die erste Form gebracht sind, giebt bei jeder das Product der innern und äußern Glieder $ad = bc$. Man darf bei solchen Proportionen daher

α) die innern Glieder mit einander,

β) die äußern Glieder mit einander, und

γ) die Glieder jedes Verhältnisses mit einander verwechseln.

2) Bei Proportionen der zweiten und vierten Form des §. 395, denen, worin die Glieder des einen Verhältnisses mit den Gliedern des andern von verschiedener Art sind, läßt sich aus der Proportion:

$$a : b = c : d$$

nur die eine:

$$b : a = d : c$$

durch die Vertauschung der Glieder jedes Verhältnisses herleiten. Die übrigen finden nicht Statt, weil sonst ungleichartige Größen zu Gliedern eines Verhältnisses gemacht werden würden.

§. 405.

In jeder geometrischen Proportion dürfen die Glieder desselben Verhältnisses, und auch die homologen Glieder mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt werden.

Aus der Proportion:

$$a : b = c : d$$

folgen die Proportionen:

$$1)\ an : bn = c : d;$$

$$2)\ an : b = cn : d;$$

$$3)\ \frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d;$$

$$4)\ \frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d,$$

worin n eine beliebige unbenannte Zahl bedeutet.

Denn Nr. 1 und 3 sind aus der anfänglichen Proportion dadurch entstanden, daß man Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{a}{b}$ mit einerlei Zahl multiplicirte, wodurch sein Werth

nicht geändert wird; Nr. 2 und 4 aber dadurch, daß beide Seiten der Gleichung $a : b = c : d$ mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt wurden, welches die Gleichheit nicht stört.

Daß alle Glieder einer Proportion durch einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt werden dürfen, folgt hieraus von selbst.

§. 406.

Aus $a : b = c : d$, folgt:

$$an : b = cn : d \text{ (§. 405. Nr. 2)}$$

und daraus 1) $an : b = c : \frac{d}{n}$ (§. 405. Nr. 3).

Eben so läßt sich aus:

$a : b = c : d$, folgern:

$a : bn = c : dn$ und daraus

ferner 2) $a : bn = \frac{c}{n} : d$.

Wenn also eins der äußern (oder innern) Glieder einer Proportion mit einer Zahl multiplicirt, und das andere äußere (oder innere) durch dieselbe Zahl dividirt wird, so entsteht wieder eine Proportion.

Auch aus der Lehre von den Gleichungen und den Rechnungsarten mit Brüchen ließe sich dieser Satz sehr leicht herleiten.

§. 407.

Indem man mehrere der Veränderungen, welche in den beiden vorhergehenden §§. gezeigt sind, zugleich vornimmt, lassen sich noch auf mancherlei Weise aus einer Proportion andere herleiten, die aber sämmtlich aufzuzählen überflüssig seyn würde. Nur folgende davon, welche besonders dazu

dienen, eine Proportion abzukürzen oder ihr eine bequemere Gestalt zu geben, mögen erwähnt werden.

Aus $a : b = c : d$ erhält man nämlich

1) $am : bn = cm : dn$;

2) $am : \frac{b}{m} = cm : \frac{d}{m}$;

3) $am : \frac{b}{n} = cm : \frac{d}{n}$;

4) $\frac{a}{n} : \frac{b}{m} = cm : dn$.

§. 408.

Zwei oder mehrere Proportionen, in denen alle Glieder unbenannte Zahlen sind, können durch Multiplication oder Division zu einer neuen Proportion verbunden werden.

Wenn $a : b = c : d$ und

$n : m = p : q$, so ist

1) $an : bm = cp : dq$ und

2) $\frac{a}{n} : \frac{b}{m} = \frac{c}{p} : \frac{d}{q}$.

Denn aus der Annahme folgt nach §. 399

$ad = bc$ und

$nq = pm$; daher ist auch durch Multiplication, $adnq = bcpm$, welches die erste abgeleitete Proportion, und durch Division

$\frac{ad}{nq} = \frac{bc}{pm}$, welches die zweite abgeleitete Proportion giebt, wenn man die Producte ihrer äußern und innern Glieder nimmt.

§. 409.

Wenn

1) $a : b = c : d$ und

2) $a : f = c : g,$
so ist auch $b : f = d : g;$
denn aus 1) folgt
$$a : c = b : d$$
und aus 2)
$$a : c = f : g \text{ (§. 404)},$$
daher auch
$$b : d = f : g \text{ (§. 396)}$$
oder $b : f = d : g.$

Sind also in zwei Proportionen ein Paar homologer Glieder sich gleich, so steht das andere Paar homologer Glieder beider in gleichem Verhältnisse.

§. 410.

Wenn 1) $a : b = c : d$
und 2) $f : b = c : g,$
so ist $a : f = g : d;$
denn aus der Annahme folgt
$$ad = bc \text{ und}$$
$$fg = bc$$
mithin ist auch $ad = fg$ und daraus
$$a : f = g : d \text{ (§. 403)}.$$

Wenn also zwei Proportionen einerlei mittlere Glieder haben, so verhalten sich ihre ersten Glieder umgekehrt, wie ihre vierten Glieder.

§. 411.

Wenn die Glieder einer geometrischen Proportion unbenannte Zahlen sind, so darf man alle Glieder derselben auf einerlei Potenz erheben, oder daraus die Wurzel einerlei Grades ziehen, und es entstehen wiederum geometrische Proportionen.

Aus $a : b = c : d$ folgen die Proportionen

$$a^n : b^n = c^n : d^n \text{ und}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} .$$

Denn sie entstehen aus der anfänglichen Proportion dadurch, daß man die beiden gleichen Quotienten, welche diese ausdrückt, auf die Potenz desselben Grades erhebt, oder aus beiden die Wurzel desselben Grades zieht, wodurch ihre Gleichheit nicht gestört wird. (§§. 290. 298).

§. 412.

In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe oder die Differenz der ersten beiden Glieder zu einem derselben, wie die Summe oder die Differenz der letzten beiden Glieder zu dem gleichnamigen, mit welchem man die erste Summe oder Differenz vergleicht.

Es sey $a : b = c : d$, so ist auch

1) $(a \mp b) : b = (c \mp d) : d$;
2) $(a \mp b) : a = (c \mp d) : c$;
3) $(b - a) : b = (d - c) : d$;
4) $(b - a) : a = (d - c) : c$.

Denn da aus der Annahme folgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

so ist auch $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$,

oder durch Vereinigung

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$$

oder, welches dasselbe ist:

$$(a + b) : b = (c + d) : d.$$

Auf dieselbe Art wird, indem man 1 subtrahirt, bewie-

sen, daß auch $(a - b) : b = (c - d) : d$ aus der angenommenen Proportion folgt.

Will man aber aus der anfänglichen Proportion folgern:

$$(a \mp b) : a = (c \mp d) : c$$

so müssen, um den Beweis dafür auf dieselbe Art wie vorhin zu führen, in der Proportion $a : b = c : d$ zuerst die vorhergehenden und nachfolgenden Glieder in beiden Verhältnissen verwechselt, und in dem einen Falle anstatt 1 von jedem Verhältnisse zu subtrahiren, diese von 1 subtrahirt werden.

Eben so müssen für die Ableitung der Proportion $(b - a) : b = (d - c) : d$, die beiden gleichen Quotienten $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ von 1 subtrahirt werden; und endlich für die Ableitung der Proportion $(b - a) : a = (d - c) : c$ vorher die Glieder in jedem Verhältnisse der anfänglichen Proportion verwechselt, und dann muß auf beiden Seiten der entstehenden Gleichung 1 abgezogen werden.

§. 413.

Aus einer Proportion, in welcher die Verwechselung der mittlern Glieder erlaubt ist (§. 404), können, nachdem diese geschehen, auf gleiche Art wie im vorhergehenden §. neue Proportionen abgeleitet werden; diese entstehen alsdann aus der anfänglichen Proportion durch Addition oder Subtraction der homologen Glieder. So folgt aus

$$a : b = c : d;$$

1) $(a \mp c) : c = (b \mp d) : d;$
2) $(a \mp c) : a = (b \mp d) : b;$
3) $(c - a) : c = (d - b) : d;$
4) $(c - a) : a = (d - b) : b.$

§. 414.

Durch Versetzung der Glieder und Verbindung mehrerer

Pro-

Proportionen der beiden letzten §§. können noch viele andere Proportionen dieser Art aus einer und derselben hergeleitet werden; z. B.

Aus $a : b = c : d$ ist nach §. 412. Nr. 1.

$$(a + b) : b = (c + d) : d \text{ und}$$

$$(a - b) : b = (c - d) : d$$

daher auch nach §. 409

$$(a + b) : (a - b) = (c + d : (c - d)$$

Es ist indessen nicht nöthig, sich alle diese Veränderungen dem Gedächtnisse einzuprägen, da man sie sich jederzeit aus den angeführten Hauptarten derselben leicht ableiten kann.

§. 415.

Wenn das Verhältniß auf der einen Seite in mehreren Proportionen dasselbe ist, so ist auch das Verhältniß der Summe der gleichnamigen Glieder ihrer Verhältnisse auf der andern Seite jenem Verhältnisse gleich. D. h.

Wenn z. B.

1) $a : b = m : n$
2) $c : d = m : n$
3) $e : f = m : n$, so ist auch:

$$(a + c + e) : (b + d + f) = m : n,$$

wobei natürlich vorausgesetzt werden muß, daß a, b, c, d, e, f sämmtlich gleichartige Größen sind.

Denn aus 1 und 2 folgt

$$a : b = c : d, \text{ daher}$$

$$(a + c) : (b + d) = c : d \text{ (§. 413 Nr. 1)},$$

also auch, da nach 2 und 3:

$$c : d = e : f,$$

$$(a + c) : (b + d) = e : f, \text{ und daraus wie vorhin:}$$

$$(a + c + e) : (b + d + f) = e : f; \text{ da aber}$$

$e : f = m : n$, so ist endlich:

$$(a + c + e) : (b + d + f) = m : n.$$

Man sieht hieraus leicht, daß der Beweis sich wiederholt, wenn anstatt drei noch mehrere Proportionen von der obigen Beschaffenheit angenommen werden, und daß also der Satz von beliebig vielen gilt.

Auch ist klar, daß auf gleiche Weise aus den angenommenen Proportionen gefolgert werden kann:

$$(a - c - e) : (b - d - f) = m : n.$$

Zusammengesetzte Verhältnisse.

§. 416.

Wenn man die gleichnamigen Glieder zweier Verhältnisse unbenannter Zahlen in einander multiplicirt, und diese Producte wieder zu respectiven Gliedern eines neuen Verhältnisses macht, so heißt dieses ein aus den ersten Verhältnissen zusammengesetztes Verhältniß.

Z. B. Aus $a : b$ und $c : d$ ist $ac : bd$ das zusammengesetzte Verhältniß.

§. 417.

Umgekehrt kann ein Verhältniß, dessen Glieder aus beliebig vielen Factoren bestehen, als ein aus eben so vielen Verhältnissen zusammengesetztes angesehen werden, und zwar auf mehr als eine Art.

Z. B. Das Verhältniß $abc : def$ kann durch die Zusammensetzung der Verhältnisse:

$$\left.\begin{matrix} a : d \\ b : e \\ c : f \end{matrix}\right\} \text{ oder der } \left.\begin{matrix} b : d \\ c : e \\ a : f \end{matrix}\right\} \text{ oder der } \left.\begin{matrix} c : d \\ a : e \\ b : f \end{matrix}\right\} \text{ u. s. w.}$$

entstanden seyn.

§. 418.

Aus den Verhältnissen

$a : b$

$b : c$
$c : d$

wird durch Zusammensetzung $abc : bcd$, und daraus entsteht durch Division beider Glieder mit einerlei Zahl bc, das Verhältniß $a : d$.

Man kann sich daher auch jedes Verhältniß, dessen Glieder nicht aus Factoren bestehen, aus so vielen andern durch Zusammensetzung entstanden denken, wie man will.

Z. B. das Verhältniß $a : b$, kann durch die Zusammensetzung folgender Verhältnisse hervorgebracht werden:

$a : n$
$n : p$
$p : q$
$q : b$.

§. 419.

Wenn das Verhältniß zweier unter sich gleichartiger übrigens beliebiger Größen, so wie das der zweiten dieser Größen zu einer dritten, das der dritten zu einer vierten u. s. w. durch Verhältnisse unbenannter Zahlen gegeben wird, so ist das Verhältniß der ersten Größe zu der letzten gleich dem aus jenen einzelnen Zahlenverhältnissen zusammengesetzten Verhältnisse.

Die großen Buchstaben mögen hier beliebige gleichartige Größen, die kleinen Buchstaben unbenannte Zahlen vorstellen, so folgt

1) aus $A : B = m : n$ und
$B : C = p : q$, daß
$A : C = mp : nq$ seyn wird.

Denn aus der ersten angenommenen Proportion ist

$$B = A \cdot \frac{n}{m} \text{ (§. 400).}$$

Diesen Werth für B in die zweite gesetzt, giebt:

$$A \cdot \frac{n}{m} : C = p : q,$$

und daraus wird durch Veränderungen nach den §§. 405 und 406

$$A : C = pm : nq.$$

Es sey ferner:

2) $A : B = m : n,$
$B : C = p : q$ und
$C : D = x : y$, so ist
$A : D = mpx : nqy.$

Denn nach Nr. 1 folgt aus den ersten beiden Proportionen

$A : C = mp : nq$, und da vermöge der Annahme

$$C : D = x : y,$$

so ist wiederum nach Nr. 1.

$$A : D = mpx : nqy.$$

Hieraus erhellt, daß der Beweis des ausgesprochenen Satzes bei ganz beliebig vielen gegebenen Verhältnissen auf den bei zweien zurückkommt.

Anmerk. Die Vergleichung zweier Größen durch Hülfe des bekannten Verhältnisses beider zu einer dritten kann ebenfalls durch gegebene Gleichungen verlangt werden, und führt alsdann auf dasselbe Resultat. Nämlich, wenn anstatt der Proportionen,

$A : B = m : n$ und
$B : C = p : q$

die Gleichungen

$nA = mB$ und
$qB = pC$

gegeben sind, so ist aus der ersten

$$B = A \cdot \frac{n}{m}.$$

Dieses in die zweite für B gesetzt, giebt

$$A \cdot \frac{nq}{m} = pC, \text{ mithin}$$

$$A : nq = pm \cdot C \text{ oder}$$

$$A = C \cdot \frac{pm}{nq},$$

woraus wiederum die Proportion:

$A : C = pm : nq$ gemacht werden kann.

§. 420.

Es sey, indem die vorige Bezeichnung beibehalten wird:

1) $mA : nB = f : g$ und

2) $pB : qC = h : k$; so ist

$A : C = fhnq : gkmp$. Denn aus 1. folgt

$A : B = fn : gm$ \
und aus 2. $B : C = hq : kp$ } (§. 406), daher ist auch

$A : C = fnhq : gmkp$ (§. 419).

Auf dieselbe Art kann aus

$mA : nB = f : g$,

$pB : qC = h : k$ und

$rC : vD = x : y$ hergeleitet werden:

$A : D = fhxnqv : gkympr$.

(Ueber die Anwendung dieses Satzes sehe man §. 497).

---

§. 421.

Für die Anwendung der Proportionen ist es erforderlich, die Proportionalität zwischen wirklichen Größen erkennen zu können. Folgender Satz begründet einen Fall darüber, welcher in den Untersuchungen der reinen und angewandten Mathematik sehr oft vorkommt, und darf, indem er darin viele Beweise ungemein abkürzt, als besonders wichtig angesehen werden.

Wenn sich aus dem Gesetze der Entstehung zweier Größen, sie mögen gleichartig seyn oder

nicht, eine solche gegenseitige Verbindung beider ergiebt, daß die eine nicht wachsen oder abnehmen kann, ohne daß zugleich die andere größer oder kleiner wird, und zwar dergestalt, daß, wenn die eine um beliebige unter sich gleiche Theile zunimmt, auch die andere um unter sich gleiche Theile wächst, — so ist das Verhältniß zweier Zustände der einen Größe gleich dem Verhältnisse der diesen respective correspondirenden beiden Zustände der andern; d. h. die dadurch hervortretenden vier Größen — allemal die beiden gleichartigen unter sich verglichen — stehen dann in geometrischer Proportion.*)

Zuerst mag bemerkt werden, daß hierbei, wenn ein Zustand der einen jener beiden Größen ursprünglich angenommen werden möchte, der diesem correspondirende Zustand der andern derjenige heißen muß, welcher durch

*) Ein gleicher Lehrsatz findet sich auch in Thibaut's Grundriß der reinen Mathematik, Göttingen 1831, pag. 179. — Der Beweis desselben für den Fall, daß die zu vergleichenden Größen incommensurabel angenommen werden, konnte aber nicht, ohne mehrere andere, in jenem Werke aufgenommene, Untersuchungen vorauszuschicken, wie dort geführt werden. In der hier gewählten Darstellung scheint es mir jedoch nicht an Strenge des Beweises zu fehlen. —

Als eine Anwendung dieses Theorems mag unter andern die auf den Beweis der geometrischen Lehrsätze:

„die Winkel verhalten sich wie die Kreisbögen, welche mit einerlei Halbmesser aus ihren Scheitelpuncten zwischen den Schenkeln beschrieben werden;

die Flächen der Rechtecke von gleicher Höhe verhalten sich wie die Grundlinien;

die Neigungswinkel zweier Ebenen verhalten sich wie die Flächenwinkel derselben u. s. w."

erwähnt werden.

das Gesetz der Entstehung gleichzeitig für die zweite Größe hervorgeht.

Es mögen nun A und $\mathfrak{A}$ irgend zwei Zustände der einen Größe, und B und $\mathfrak{B}$ die diesen entsprechenden der andern bedeuten, so daß A mit B, und $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ correspondirend sey. $\frac{A}{\mathfrak{A}}$ und $\frac{B}{\mathfrak{B}}$ erscheinen dann als Quotienten zweier gleichartiger Größen, wenn diese durch Zahlen ausgedrückt gedacht werden. Mögen nun diese Zahlen wirklich anzugeben seyn oder nicht, so wird doch unter obiger Voraussetzung für diese Größen in jedem Falle die Proportion:

$$A : \mathfrak{A} = B : \mathfrak{B}$$ gültig seyn.

1. Nimmt man an, daß für die Größen-Zustände A und $\mathfrak{A}$ der ersten Größe ein gemeinschaftliches Maaß, etwa a, anzugeben sey, so daß, — unter n und m ganze Zahlen verstanden —, $A = na$ und $\mathfrak{A} = ma$ werde: so muß, wenn b den mit a correspondirenden Zustand der zweiten Größe bedeutet, nach dem angenommenen Gesetze des Zusammenhanges beider, na mit nb, ma mit mb correspondiren; also, indem die den Zuständen A und $\mathfrak{A}$ entsprechenden Werthe B und $\mathfrak{B}$ seyn sollten, $B = nb$ und $\mathfrak{B} = mb$ werden. Mithin ist:

$$\frac{A}{\mathfrak{A}} = \frac{na}{ma} = \frac{n}{m}, \text{ und}$$

$$\frac{B}{\mathfrak{B}} = \frac{nb}{mb} = \frac{n}{m}; \text{ folglich}$$

$$\frac{A}{\mathfrak{A}} = \frac{B}{\mathfrak{B}} \text{ oder } A : \mathfrak{A} = B : \mathfrak{B}.$$

2. Wenn aber die beiden Werthe A und $\mathfrak{A}$ kein gemeinschaftliches Maaß haben, so daß bei der Vergleichung beider mit einem, auch noch so klein gewählten, aliquoten Theile a des einen A, für den zweiten $\mathfrak{A}$ stets ein Ueber-

schuß α bleibt, der dann natürlich noch kleiner als a ist, wenn also: $A = na$ und $\mathfrak{A}' = ma + \alpha$ erscheint, so wird nach der Annahme über die gegenseitige Verbindung der zum Grunde liegenden Größen, indem wieder b den mit a correspondirenden Werth bezeichnet, $B = nb$ und $\mathfrak{B} = mb + \beta$ werden müssen, worin β etwas Kleineres als b bedeutet, weil $\mathfrak{A} < (m+1)\,a$ ist, und deshalb auch $\mathfrak{B} < (m+1)\,b$ seyn muß.

Es ist demnach:

$$\frac{A}{\mathfrak{A}} = \frac{na}{ma + \alpha} \text{ und } \frac{B}{\mathfrak{B}} = \frac{nb}{mb + \beta},$$

worin a und also auch b, noch mehr folglich α und β, beliebig klein gedacht werden dürfen. Aus der unbegrenzten Fortsetzung des Verkleinerns dieser Größen ergiebt sich aber, daß die Größe der Quotienten $\frac{na}{ma + \alpha}$ und $\frac{nb}{mb + \beta}$ respective mit der der Quotienten $\frac{na}{ma}$ und $\frac{nb}{mb}$ übereinstimmen, daß sie folglich auch wie diese unter einander gleich seyn müssen. — Durch eine indirecte Beweis-Art erhellt dies auch folgendermaaßen. Wollte man nämlich unter den gemachten Voraussetzungen annehmen, daß $\frac{na}{ma+\alpha} < \frac{nb}{mb+\beta}$ wäre, der erste Quotient also vergrößert werden müßte, um dem zweiten gleich zu kommen, welche Vergrößerung durch Verkleinerung seines Nenners jederzeit ausführbar seyn muß — so setze man:

$$\frac{na}{ma + \alpha - x} = \frac{nb}{bm + \beta}.$$

Wenn hierin nun x auch einen noch so kleinen Werth annehmen mag, so läßt sich doch a anfänglich noch kleiner als x wählen, um so mehr würde mithin α kleiner als x

erscheinen. Der Renner des ersten Quotienten würde also kleiner als ma, der Quotient selbst daher größer als $\frac{na}{ma}$ oder $\frac{n}{m}$, während doch der Renner des zweiten Quotienten größer als mb, dieser zweite Quotient also kleiner als $\frac{nb}{mb}$ oder $\frac{n}{m}$ ist, woraus die Unmöglichkeit der Annahme hervorgeht. Mit der beliebigen Verkleinerung des Werths a, hängt die des correspondirenden Werths b zusammen, und dadurch läßt sich auf völlig gleiche Weise die Unmöglichkeit zeigen, daß nicht

$$\frac{na}{ma + \alpha} > \frac{nb}{mb + \beta}, \text{ also nicht etwa}$$

$$\frac{na}{ma + \alpha} = \frac{nb}{mb + \beta - x} \text{ seyn könne.}$$

Es kann demnach nur

$$\frac{na}{ma + \alpha} = \frac{nb}{mb + \beta}$$

seyn, d. h. es wird auch für den gedachten Fall der Incommensurabilität:

$$\frac{A}{\mathfrak{A}} = \frac{B}{\mathfrak{B}} \text{ oder}$$

$$A : \mathfrak{A} = B : \mathfrak{B} \text{ seyn.}$$

Zweites Capitel.

Von den arithmetischen und geometrischen Progressionen.

---

§. 422.

Wenn in einer Reihe von Zahlen jede folgende aus der vorhergehenden nach einer sich immer gleichbleibenden

Regel gebildet wird, so heißt die Reihe eine gesetzmäßige, und die Zahlen werden die Glieder derselben genannt.

Es giebt eine große Mannigfaltigkeit von dergleichen gesetzmäßigen Reihen; in der niedern Arithmetik können aber nur die beiden, welche den Namen der arithmetischen und geometrischen Progressionen führen, vollständig untersucht werden, daher hier nur von diesen die Rede ist.

Arithmetische Progressionen.

§. 423.

Eine arithmetische Progression ist eine Reihe, worin jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Addition derselben Größe entsteht. Diese Größe heißt der Denominator oder die Differenz der Progression. Ist sie und das erste Glied, von dem man ausgehen soll, gegeben, so ist dadurch auch festgelegt, wie die Glieder der Progression sämmtlich zu bilden sind. Das erste Glied werde allgemein mit a, der Denominator mit d bezeichnet, so ist die Progression:

$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ a + 4d$ u. s. w.

Wird der Denominator negativ $= - d$ angenommen, das erste Glied aber wieder mit a bezeichnet, so ist die Progression:

$a,\ a - d,\ a - 2d,\ a - 3d,\ a - 4d$ u. s. w.

Letztere kann auch so geschrieben werden:

$a,\ a + (-d),\ a + 2(-d),\ a + 3(-d),\ a + 4(-d)$ u. s. w.,

wodurch sie ganz dieselbe Form annimmt, welche die vorhergehende hat, weshalb diese als die allgemeine Form einer arithmetischen Progression angesehen werden darf.

Anmerk. Man unterscheidet zunehmende und abnehmende Progressionen, je nachdem die Glieder derselben immer größere oder kleinere Zahlen werden. Offenbar

hängt dies bei den arithmetischen Progressionen nur davon ab, ob das Anfangsglied und der Denominator einstimmige oder widerstreitende Größen sind. Es ist aber leicht einzusehen, daß bei einem unbedingten Fortschritte der Glieder einer arithmetischen Progression, in welcher Anfangsglied und Denominator entgegengesetzte Größen sind, endlich ein Glied erscheinen muß, welches mit dem ihm vorhergehenden entgegengesetzte Zeichen hat, und daß von da an, die Glieder wieder größere positive oder negative Zahlen werden. Z. B. wenn das erste Glied 12, der Denominator —5 ist, so wird die Progression

$$12,\ 7,\ 2,\ -3,\ -8,\ -13,\ -18 \text{ u. s. w.}$$

Der Begriff von zunehmender oder abnehmender arithmetischer Progression müßte also genauer, etwa so gefaßt werden, daß die erste diejenige seyn soll, worin die Glieder immer größere positive oder negative Zahlen vom Anfange an, die zweite aber diejenige, worin die Glieder anfangs kleiner werden, bis sie in das entgegengesetzte Zeichen übergehen. Jedoch kann auch eine andere Bestimmung darüber gemacht werden. Im Allgemeinen ist es überflüssig, auf diesen Unterschied der arithmetischen Progressionen Rücksicht zu nehmen, da sie in ihren übrigen Eigenschaften einerlei Gesetz unterworfen sind.

§. 424.

Aus der Erklärung der arithmetischen Progression ergiebt sich, daß der Denominator in ihrem zweiten Gliede einmal, in ihrem dritten Gliede zweimal, in ihrem vierten Gliede dreimal, überhaupt in jedem Gliede einmal weniger zum ersten Gliede addirt ist, als die Zahl dieses Gliedes Einheiten enthält. Will man daher in der Progression

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d \text{ u. s. w.}$$

ein seiner Zahl nach unbestimmtes Glied, das nte Glied andeuten, so erhält man dafür

$$a+(n-1)d.$$

Dieser Ausdruck wird auch das allgemeine Glied

(terminus generalis) der Reihe genannt, weil aus ihm, indem man für die unbestimmte Größe n bestimmte Werthe ganzer positiver Zahlen setzt, jedes beliebige Glied der Reihe abgeleitet werden kann, und zwar so, daß die Substitution einer gewissen Zahl für n, das allgemeine in das dieser Zahl entsprechende Glied der Reihe verwandelt. Es sey z. B. $1 + (n - 1)3$ das allgemeine Glied einer Reihe, so wird daraus:

für $n = 1$, 1
$n = 2$, 4
$n = 3$, 7
$n = 4$, 10
u. s. w.

daher die Reihe selbst 1, 4, 7, 10, u. s. w; das 20ste Glied derselben würde $1 + (20 - 1) 3 = 58$ seyn.

Die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w. ist eine arithmetische Progression, worin das erste Glied und der Denominator $= 1$, und das allgemeine Glied $= n$ ist.

§. 425.

Ist die Progression geschlossen, und bedeutet n die Anzahl aller Glieder, u das letzte, a das erste Glied und d den Denominator derselben, so ist

$$u = a + (n - 1) d$$

die Formel, wonach aus dem ersten Gliede, der Anzahl der Glieder und dem Denominator, das letzte Glied einer arithmetischen Progression berechnet werden kann.

Nimmt man zur Zeit drei der darin vorkommenden Größen als bekannt, die vierte als unbekannt an, so läßt sich durch Auflösung der Gleichung $u = a + (n - 1) d$, aber auch jede dieser Größen durch die übrigen bestimmen. So findet sich

$$a = u - (n - 1) d;$$

$$n = \frac{u - a}{d} + 1;$$

$$d = \frac{u - a}{n - 1}.$$

§. 426.

Die Form einer arithmetischen Progression bringt es mit sich, daß beliebige drei auf einander folgende Glieder derselben immer in einerlei **stetiger**, und vier auf einander folgende Glieder in einerlei **abgesonderter** arithmetischer Proportion stehen; denn die Denominatoren der arithmetischen Verhältnisse, in denen irgend zwei benachbarte Glieder der Progression stehen, sind allemal gleich dem Entgegensetzten des Denominators der Progression, mithin einander gleich. Es sey die Progression:

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ a + 4d, \text{ u. s. w.}$$

so ist:

$$a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d) \text{ und auch}$$

$$a - (a + d) = (a + 2d) - (a + 3d);$$

denn in beiden Proportionen ist der Denominator der Verhältnisse auf beiden Seiten $= - d$.

Dieser Satz kann dazu dienen, zwischen zwei benachbarte Glieder einer Progression ein drittes einzuschalten, so daß diese drei Glieder wieder eine arithmetische Progression bilden: das einzuschaltende Glied ist die mittlere arithmetische Proportionale der beiden, zwischen welchen es eingeschaltet werden soll.

Aus der Progression

1, 6, 11, 16, 21, 26, 31 u. s. w.

würde z. B. durch Einschalten die neue entstehen

$1,\ 3\frac{1}{2},\ 6,\ 8\frac{1}{2},\ 11,\ 13\frac{1}{2},\ 16$ u. s. w.

indem in der anfänglichen, wenn das einzuschaltende Glied mit x bezeichnet wird:

$$1 - x = x - 6 \text{ also } x = \tfrac{7}{2} = 3\tfrac{1}{2};$$
$$6 - x = x - 11 \text{ also } x = \tfrac{17}{2} = 8\tfrac{1}{2}$$

u. s. w. ist.

Auf diese Art können nach und nach beliebig viele Glieder eingeschaltet werden.

§. 427.

Die Summe einer Progression heißt der Betrag, welcher durch die Addition ihrer sämmtlichen Glieder entsteht.

Die Gesetzmäßigkeit einer Reihe läßt es schon im Voraus erwarten, daß aus gewissen gegebenen Größen, die sie bestimmen, auch ihre Summe abgeleitet werden kann, und dazu nicht unmittelbare Addition aller Glieder der Reihe nöthig ist, welche die vorherige Darstellung dieser sämmtlichen Glieder erfordern würde.

§. 428.

Die Ableitung einer allgemeinen Formel für die Summe einer arithmetischen Progression wird durch folgende Bemerkung vermittelt.

Jedes folgende Glied einer arithmetischen Progression erhält in Beziehung auf das vorhergehende einen Zuwachs, welcher gleich dem Denominator der Progression ist; betrachtet man aber die Glieder, vom Ende der Progression rückwärts gehend, so verliert jedes Glied in Beziehung auf sein benachbartes einen eben so großen Theil. Hieraus folgt, daß die Summe des ersten und letzten Gliedes so viel beträgt, als die Summe des zweiten und vorletzten, oder als die Summe des dritten und dritten vom Ende, überhaupt so viel, als die Summe zweier von den Enden gleich weit abstehender Glieder.

Denkt man sich nun unter einer Progression dieselbe Progression in verkehrter Ordnung, d. h. so gesetzt, daß das letzte Glied unter dem ersten, das vorletzte unter dem zweiten u. s. w. zu stehen kömmt, (z. B.

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad a+4d$$
$$a+4d, \quad a+3d, \quad a+2d, \quad a+d, \quad a)$$

und addirt beide Progressionen, wodurch man also das Doppelte des Betrages aller Glieder der einen erhält, so entsteht die Summe des ersten und letzten Gliedes $(2a+4d)$ der Progression so oft, als Glieder derselben vorhanden sind. — Die Summe einer arithmetischen Progression ist mithin gleich dem halben Producte der Summe des ersten und letzten Gliedes in die Anzahl der Glieder.

Bezeichnet S die Summe der Progression, deren erstes Glied a, letztes Glied u, und worin die Anzahl der Glieder n ist, so hat man:

$$S = \frac{(a+u)\,n}{2},$$

als allgemeine Formel für die Summe der arithmetischen Progression.

Durch Auflösung dieser Gleichung kann jede der Größen a, n und u durch die übrigen drei ausgedrückt werden; dadurch findet sich nämlich:

$$a = \frac{2S}{n} - u;$$

$$n = \frac{2S}{a+u};$$

$$u = \frac{2S}{n} - a.$$

Für die Summe der Reihe der natürlichen Zahlen

1, 2, 3, 4, ... wird, weil darin u allemal = n ist;
$S = \frac{(1 + n) n}{2}$ (Vergl. §. 424).

§. 429.

Ist das letzte Glied nicht gegeben, dafür aber der Denominator der Progression bekannt, so wird, indem man in die Formel für die Summe anstatt u den Werth $a + (n - 1) d$ (§. 425) setzt,

$$S = \frac{(2a + (n - 1) d) n}{2},$$

eine Formel, welche dazu dient, aus dem ersten Gliede, dem Denominator und der Anzahl der Glieder die Summe der Progression zu berechnen.

Geometrische Progressionen.

§. 430.

Eine geometrische Progression ist eine Reihe, worin jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplication desselben mit einer und derselben Zahl entsteht.

Diese Zahl wird der Exponent der Progression genannt.

Das erste Glied heiße a, der Exponent der Progression e, so ist sie selbst:

$$a,\ ae,\ ae^2,\ ae^3,\ ae^4,\ \text{u. s. w.}$$

Ist der Exponent der Progression eine ganze Zahl oder ein unächter Bruch, so werden die Glieder immer größere Zahlen; ist er aber ein ächter Bruch, so werden sie immer kleinere Zahlen. Vom ersten Gliede ist es daher ganz unabhängig, ob die geometrische Progression eine zunehmende oder eine abnehmende Reihe wird.

Das

Das allgemeine Schema einer abnehmenden geometrischen Progression ist, indem man $\frac{1}{e}$ zum Exponenten der Progression, und zum ersten Gliede, wie vorhin, a annimmt:

$$a, \frac{a}{e}, \frac{a}{e^2}, \frac{a}{e^3}, \frac{a}{e^4} \text{ u. s. w.}$$

oder auch (nach §. 189)

$$a, ae^{-1}, ae^{-2}, ae^{-3}, ae^{-4} \text{ u. s. w.}$$

§. 431.

Da die geometrische Progression im zweiten Gliede den Exponenten einmal, im dritten zweimal, allgemein in jedem einmal weniger als Factor enthält, als die Zahl des Gliedes Einheiten in sich faßt, so ist ae^{n-1} das nte oder allgemeine Glied der Progression, deren erstes Glied a und deren Exponent e heißt.

§. 432.

Setzt man in der Progression:

$$a, ae, ae^2, ae^3, ae^4 \text{ u. s. w.}$$

die Anzahl der Glieder = n und ihr letztes Glied = u, so hat man

$$1)\quad u = ae^{n-1}.$$

Hieraus findet sich durch Auflösung:

$$2)\quad a = \frac{u}{e^{n-1}};$$

$$3)\quad e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}};$$

$$4)\quad n = \frac{\log. u - \log. a}{\log. e} + 1. \text{ (§ 382.)}$$

§. 433.

Aus der Erklärung der geometrischen Progression ergiebt sich, daß drei unmittelbar auf einander folgende Glie-

der derselben in stetiger, und vier solche in abgesonderter geometrischer Proportion stehen; denn die Verhältniß-Exponenten zweier auf einander folgender Glieder werden immer dem Umgekehrten des Exponenten der Progression gleich. So ist z. B. in der Progression

$$a, ae, ae^2, ae^3, ae^4 \text{ u. s. w.}$$

$$a : ae = ae : ae^2 \text{ und}$$

$$a : ae = ae^2 : ae^3;$$

denn in beiden Proportionen ist der Verhältniß-Exponent beider Verhältnisse $= \frac{1}{e}$.

Aehnlich wie es für arithmetische Progressionen dargethan ist, bietet dieser Satz das Mittel dar, zwischen die Glieder einer geometrischen Progression neue einzuschalten, so daß wieder eine solche Progression entsteht. Das einzuschaltende Glied findet sich hier als die mittlere geometrische Proportionale der beiden Glieder, zwischen welche es eingeschaltet werden soll.

Anmerk. Die hier und §. 426 erwähnten Eigenschaften arithmetischer und geometrischer Progressionen gestatten eine Anwendung auf die annähernde Berechnung der Logarithmen. Es findet sich nämlich, daß die Zahlen, denen in irgend einem Systeme wirklich Logarithmen zukommen, in geometrischer Progression, und die ihnen zugehörigen Logarithmen in arithmetischer Progression stehen.

Im gemeinen Logarithmen-Systeme geben die Zahlen die geometrische Progression:

$$10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 \text{ u. s. w., oder}$$

$$1, 10, 100, 1000, 10000 \text{ u. s. w.}$$

die ihnen zugehörigen Logarithmen die arithmetische Progression:

$$0, 1, 2, 3, 4 \text{ u. s. w.}$$

Dadurch, daß man nun in beiden Progressionen nach den gegebenen Regeln Glieder einschaltet, rücken in der

geometrischen Progression die Zahlen einander immer näher, deren entsprechende Logarithmen zugleich durch Einschalten von Gliedern in der arithmetischen Progression gefunden werden. Die erste Einschaltung giebt z. B. zwischen 100 und 1000 das Glied $\sqrt{100000}$ und zwischen 2 und 3 das Glied $\frac{2 + 3}{2} = 2{,}5$; daher ist

$$\log. \sqrt{100000} = 2{,}5.$$

Man sieht, wie diese Betrachtung genau auf dasselbe Verfahren führt, welches im §. 361 dargestellt, dort aber aus andern Principien hergeleitet ist.

§. 434.

Für die Summe der geometrischen Progression läßt sich folgendermaßen eine allgemeine Formel ableiten.

Das erste Glied der Progression sey a, der Exponent derselben e und die Anzahl der Glieder n, so ist die Progression selbst:

$$a, ae, ae^2, ae^3 \ldots\ldots ae^{n-2}, ae^{n-1}.$$

Ferner werde das letzte Glied ae^{n-1} mit u, die Summe der Progression mit S bezeichnet.

Nun ist:

$$\begin{aligned} a : ae &= 1 : e; \\ ae : ae^2 &= 1 : e; \\ ae^2 : ae^3 &= 1 : e; \\ \cdot \quad & \quad \cdot \\ \cdot \quad & \quad \cdot \\ \cdot \quad & \quad \cdot \\ ae^{n-2} : ae^{n-1} &= 1 : e. \end{aligned}$$

Da aber auch alle benachbarte Glieder der Progression, welche bei der Unbestimmtheit ihrer Anzahl nicht sämmtlich hingeschrieben werden können, das Verhältniß 1 : e zu einander haben (§. 433), so ist nach §. 415

$$(a + ae + ae^2 + \cdots + ae^{n-2}) : (ae + ae^2 + ae^3 + \cdots + ae^{n-1}) = 1 : e,$$ d. h.

$$(S - u) : (S - a) = 1 : e,$$ mithin

$$(S - u)\, e = S - a,$$ oder

$$Se - ue = S - a;$$ daraus findet sich

$$1)\quad S = \frac{ue - a}{e - 1}$$

eine Formel für die Summe der geometrischen Progression, wenn ihr letztes Glied, ihr Exponent und ihr erstes Glied gegeben sind.

Setzt man darin für u den Werth ae^{n-1}, so wird

$$2)\quad S = \frac{ae^n - a}{e - 1},$$

eine Formel für die Summe der geometrischen Progression, wenn das erste Glied, der Exponent und die Anzahl der Glieder derselben gegeben sind.

Hieraus ergiebt sich die Regel für die Berechnung der Summe einer geometrischen Progression als folgende:

man multiplicire das letzte Glied mit dem Exponenten der Progression (oder multiplicire das erste Glied mit dem Exponenten der Progression, nachdem er auf eine eben so hohe Potenz erhoben ist, als die Anzahl der Glieder Einheiten enthält), subtrahire von diesem Producte das erste Glied, und dividire den Rest durch den um 1 verringerten Exponenten der Progression.

§. 435.

Die Formel für die Summe der geometrischen Progression kann auch auf analytischem Wege, nämlich dadurch gefunden werden, daß man die Summe vorläufig als eine bekannte Größe annimmt, und durch die Verbindung derselben

mit den gegebenen Größen der Progression, ihre Beziehung zu letzteren herzuleiten sucht.

Es sey:

1) $a + ae + ae^2 + ae^3 + \dots + ae^{n-2} + ae^{n-1} = S$

so ist, indem man beide Seiten dieser Gleichung mit e multiplicirt:

2) $ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \dots + ae^{n-1} + ae^n = eS$.

Werden die Gleichungen 1 und 2 durch Subtraction mit einander verbunden und zwar so, daß die erste von der zweiten subtrahirt wird, so heben sich alle Glieder außer dem ersten und letzten auf der linken Seite der Gleichungen gegenseitig auf, und man erhält $ae^n - a = eS - S$, und daraus wie vorhin $S = \frac{ae^n - a}{e - 1}$.

§. 436.

Die Formeln für die Summe der Progression verwandeln sich durch Multiplication des Zählers und Nenners mit -1 in die gleichgeltenden:

1) $S = \frac{a - ue}{1 - e}$ und

2) $S = \frac{a - ae^n}{1 - e}$;

sie werden in dieser Gestalt besonders bei abnehmenden Progressionen, in denen $e < 1$ angewandt, damit man es im Zähler und Nenner der Brüche sogleich mit positiven Größen zu thun hat.

§. 437.

Durch Auflösung der Gleichung

$$S = \frac{ue - a}{e - 1}$$

läßt sich jede der darin vorkommenden Größen durch die übrigen ausdrücken; man erhält dadurch:

$$1)\ a = ue - (e - 1)\, S;$$

$$2)\ u = \frac{(e - 1)\, S + a}{e};$$

$$3)\ e = \frac{S - a}{S - u}.$$

Die Gleichung

$$S = \frac{ae^n - a}{e - 1}$$

giebt
$$1)\ a = \frac{(e - 1)S}{e^n - 1};$$

$$2)\ n = \frac{\log. ([e - 1]S + a) - \log. a}{\log. e}.$$

Nimmt man aber e als unbekannte Größe an, so wird die Gleichung $S = \frac{ae^n - a}{e - 1}$ im Allgemeinen von höherem Grade, als zur directen Auflösung derselben gestattet ist.

Unendliche Reihen.

§. 438.

Von besonderer Erheblichkeit sind noch die abnehmenden geometrischen Progressionen, wenn sie ins Unendliche fortgesetzt gedacht werden. Das allgemeine Schema einer abnehmenden geometrischen Progression ist:

$$a, \frac{a}{e}, \frac{a}{e^2}, \frac{a}{e^3} \text{ u. s. w.}$$

worin e eine ganze Zahl oder einen unächten Bruch bedeuten muß.

Es ist klar, daß in dieser Progression die Glieder immer kleiner werden, und daß man durch die Fortsetzung derselben ein jede Grenze der Kleinheit noch überschreitendes Glied hervorbringen kann; denn Vergrößerung des Nenners

bei ungeändertem Zähler, welche bei der Bildung jedes folgenden Gliedes aus dem vorhergehenden immerwährend eintritt, ist Verkleinerung des Bruchs.

Eben so klar ist es aber auch, daß, wie groß man auch die Anzahl der Glieder wählt, das letzte Glied, so klein es dann auch werden mag, doch nicht gleich Null gesetzt werden kann; denn jeder Bruch, dessen Nenner seinen Zähler auch noch so sehr an Größe übertrifft, behält gleichwohl einen gewissen Werth. Aus diesem Grunde sagt man, ein Bruch würde nur dann gleich Null, wenn sein Nenner unendlich groß wäre, welches, da man das Unendliche nicht erreichen kann, eigentlich dasselbe sagt, was vorher bemerkt ist.

§. 439.

Ehe wir zu der obigen Progression zurückkehren, wird es nützlich seyn, Einiges über die Andeutung und Entstehung unendlich großer Werthe in der Algebra zu bemerken.

Für eine unendlich große Zahl ist das Zeichen ∞ eingeführt, um dadurch einen Werth anzudeuten, zu dessen Erreichung es nöthig sey, bis ins Unendliche zu gehen, d. h. den man gar nicht erreichen könne.

Nach dem, was im vorhergehenden §. erwähnt ist, setzt man daher:

$$\frac{a}{\infty} = 0,$$

worin a jede beliebige Zahl vorstellt. Wendet man den Satz „der Dividend dividirt durch den Quotienten giebt den Divisor", auf diesen Ausdruck an, so wird:

$$\frac{a}{0} = \infty,$$

welches nicht wörtlich so verstanden werden muß, daß eine Zahl durch Null dividirt, eine unendlich große Zahl zum Quotienten hervorbrächte, sondern wieder nur eine abgekürzte

Art ist, sich auszudrücken, und nichts anders sagt, als daß einem Werthe wie $\frac{a}{0}$ gar nicht entsprochen werden könne; daß aber das Wachsen der Zahl, welche einem solchen Ausdrucke mehr und mehr genüge, grenzenlos sey.

Da der Zähler a jenes Bruchs nichts zu der möglichen Realisirung des letztern beiträgt, auch $\frac{a}{0} = a \cdot \frac{1}{0}$ ist, so pflegt man gewöhnlich den Ausdruck $\frac{1}{0}$ als den einer unendlich großen Zahl aufzustellen, und $\frac{1}{0} = \infty$ zu setzen.

§. 440.

Denkt man sich nun die geometrische Progression

$$a + \frac{a}{e} + \frac{a}{e^2} + \frac{a}{e^3} + \cdots\cdots$$

deren Glieder durch Addition verbunden sind, bis ins Unendliche fortgesetzt, so läßt sich ein geschlossener Ausdruck finden, dem diese unendliche Reihe gleich, oder von dem sie die Entwickelung ist. Man sollte ihn nicht die Summe der Reihe nennen, da eine Reihe von Zahlen, deren Anzahl unendlich ist, nicht wohl summirt werden kann.

Man bezeichne die Anzahl der Glieder, welche vorläufig ganz unbestimmt seyn mag, mit n, die Summe der Progression für diese Anzahl von Gliedern mit S; so wird nach der Formel Nr. 2 des §. 436

$$S = \frac{a - \frac{a}{e^n}}{1 - \frac{1}{e}}, \text{ oder reducirt:}$$

$$S = \frac{ae^n - a}{e^n - e^{n-1}}.$$

Um diesen Ausdruck verstehen zu können, wenn für n eine unendlich große Zahl gesetzt wird, multiplicire man Zähler und Nenner mit e, so wird

$$S = \frac{ae^{n+1} - ae}{e^{n+1} - e^n}, \text{ oder}$$

$$S = \frac{ae\ (e^n - 1)}{e^n\ (e - 1)}.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Anzahl der Glieder unendlich groß ist ($n = \infty$) oder daß sich die Reihe gar nicht schließt, wird e^n, da e eine ganze Zahl bedeuten soll, selbst etwas unendlich Großes, und das -1 wird im Zähler dagegen verschwinden; bei dieser Annahme wird also

$$S = \frac{ae \cdot e^n}{e^n \cdot (e-1)} = \frac{ae}{e-1}.$$

Die Entwickelung des Quotienten $\frac{ae}{e-1}$ ist mithin gleich jener unendlichen Reihe. Nämlich:

$$a + \frac{a}{e} + \frac{a}{e^2} + \frac{a}{e^3} \cdots\cdots = \frac{ae}{e-1}.$$

Will man das letzte Glied der Reihe

$$a + \frac{a}{e} + \frac{a}{e^2} + \frac{a}{e^3} + \cdots\cdots$$

da sie weit genug fortgesetzt gedacht werden kann, geradezu gleich Null annehmen, so folgt die Summe derselben sogleich aus der allgemeinen Formel Nr. 1 des §. 436:

$$S = \frac{a - ue}{1 - e}; \text{ denn hier ist alsdann } u = o$$

$$a = a$$

$$e = \frac{1}{e} \text{ mithin}$$

$$S = \frac{a}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{ae}{e-1}.$$

Doch möchte diese Ableitung minder scharf als die vorhergehende genannt werden dürfen.

§. 441.

Ist in der vorhin betrachteten Reihe das erste Glied a selbst ein Bruch, ächt oder unächt, z. B. $= \frac{a}{b}$, so ändert sich, wie leicht zu sehen ist, in dem für sie nach dem vorigen §. zu setzenden geschlossenen Ausdrucke, weiter nichts, als daß in den Divisor desselben der Nenner dieses Bruchs (b) als Factor tritt. Oder es ist

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{be} + \frac{a}{be^2} + \frac{a}{be^3} + \ldots\ldots = \frac{ae}{b(e-1)}.$$

Beispiel.

Es ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots = \frac{2}{3}$.

Denn hier ist:

das a der allgemeinen Formel $= 1$
" b " " " $= 2$
" e " " " $= 4$

mithin $\frac{ae}{b(e-1)}$ " " $= \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$.

Es wird also die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} \text{ u. s. w.}$$

sobald man sie bei einem gewissen Gliede abbricht, immer weniger als $\frac{2}{3}$ betragen, und nur wenn man sie bis Unendliche fortsetzen könnte, wäre der Betrag ihrer Glieder $= \frac{2}{3}$. Aber sie darf im strengen Sinne gleich $\frac{2}{3}$ gesetzt werden, wenn man dabei die Andeutung macht, daß sie nicht geschlossen werden soll.

Auf dieselbe Art ist es also zu verstehen, wenn man

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1 \text{ setzt.}$$

Denn hier ist $a = 1$, $b = 2$, $e = 2$; mithin

$$\frac{ae}{b(e-1)} = \frac{1 \,.\, 2}{2 \,.\, 1} = 1.$$

§. 442.

Eine leichte Anwendung der vorstehenden Formel für die Summation unendlicher Reihen, betrifft die Reduction periodischer Decimalbrüche, nämlich die Zurückführung eines solchen auf den gemeinen Bruch, dessen Entwickelung er ist. Denn jeder periodische Decimalbruch macht von der Periode an, eine ohne Ende fortlaufende abnehmende geometrische Progression aus, deren Exponent das Umgekehrte einer höhern Einheit von der Ordnung ist, als die Anzahl der Ziffern in der Periode angiebt. So ist z. B.

$$0{,}353535 \cdots\cdots = \frac{35}{100} + \frac{35}{10000} + \frac{35}{1000000}$$

$+ \cdots\cdots$ worin der Exponent der Progression $\frac{1}{100}$ ist.

Wendet man hierauf nun die zuletzt abgeleitete Formel an, so wird:

$$a = 35,$$
$$b = 100,$$
$$e = 100, \text{ mithin}$$
$$\frac{ae}{b(e-1)} = \frac{35 \cdot 100}{100 \cdot 99} = \frac{35}{99}; \text{ daher ist}$$
$$\frac{35}{99} = 0,\, 353535 \cdots\cdots$$

Wäre ein Bruch, wie

$$3{,}1353535 \cdots\cdots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{35}{1000} + \frac{35}{100000} + \cdots\cdots$$

zu dieser Reduction gegeben, so müssen die Glieder, welche

nicht zur Progression gehören, nachdem letztere wie oben summirt ist, diesem Resultate noch wieder hinzugefügt werden. Es ist also, da hier

$$\frac{35}{1000} + \frac{35}{100000} + \frac{35}{10000000} + \ldots\ldots = \frac{35 \cdot 100}{1000 \cdot 99}$$

$$= \frac{35}{990} = \frac{7}{198} \text{ wird,}$$

$$3{,}13535 \ldots\ldots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{7}{198} = 3\tfrac{67}{495}.$$

Entwickelung des Quotienten $\frac{a^n - b^n}{a - b}$

§. 443.

In der Analysis kommt oft die Entwickelung eines Quotienten von der Form: $\frac{a^n - b^n}{a - b}$, vor. Eine Art ihrer Ableitung wird auf die Summirung einer geometrischen Progression zurückgeführt, und mag daher hier als ein Beispiel über letztere dargestellt werden. Es sey das erste Glied einer geometrischen Progression a^{n-1}, ihr Exponent $\frac{b}{a}$ und die Anzahl ihrer Glieder n, so ist die Progression selbst:

$$a^{n-1},\ a^{n-2}b,\ a^{n-3}b^2,\ \ldots\ldots\ ab^{n-2},\ b^{n-1}.$$

Um die Summe derselben zu finden, setze man in die allgemeine Formel $S = \frac{ue - a}{e - 1}$ des §. 434.

für a den Werth a^{n-1}

= e = = $\frac{b}{a}$

= u = = b^{n-1}, so wird

$$S = \frac{b^{n-1} \cdot \frac{b}{a} - a^{n-1}}{\frac{b}{a} - 1}, \text{ oder reducirt}$$

$$S = \frac{b^n - a^n}{b - a} = \frac{a^n - b^n}{a - b}.$$ Mithin ist

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

Dieser Satz sagt eigentlich Folgendes: die Differenz zweier gleich hoher Potenzen ($a^n - b^n$) läßt sich durch die Differenz ihrer Wurzeln ($a - b$) ohne Rest dividiren; der Quotient wird eine geometrische Progression, deren Glieder durch das Zeichen + verbunden sind, wovon das erste Glied (a^{n-1}) gleich der um 1 erniedrigten Potenz des ersten Theils; der Exponent der Progression $\left(\frac{b}{a}\right)$ gleich der Wurzel des zweiten Theils, dividirt durch die des ersten Theils, und die Anzahl der Glieder (n) gleich dem Exponenten der gegebenen Potenzen ist.

Da der Exponent n mit der Anzahl der Glieder der Progression übereinstimmen soll, so folgt, daß der Satz, wie er hier bewiesen ist, nur für eine ganze positive Zahl, als Werth des Exponenten der gegebenen Potenzen, gilt.

Beispiele.

1. $\frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4.$

2. $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b.$

Aus letzterem folgt

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (Vergl. §. 335. Anmerk.).

Der Satz kann auf diese Art also auch zur Zerfällung der Differenz zweier Potenzen in zwei Factoren angewandt werden.

3. $\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1,$

oder auch $= 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1}$, wornach die Summe der successiven Potenzen einer beliebigen Zahl gefunden werden kann.

Vierter Abschnitt.

Von den Kettenbrüchen und den unbestimmten Gleichungen des ersten Grades.

Erstes Capitel.

Von den Kettenbrüchen.

Erklärung und Entstehung der Kettenbrüche.

§. 444.

Wenn man Zähler und Nenner eines ächten Bruchs durch den Zähler dividirt, wodurch also der Werth des Bruchs ungeändert bleibt, so wird dessen Zähler 1, und der Nenner entweder eine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl nebst angehängtem ächten Bruche. Verfährt man im letztern Falle mit diesem ächten Bruche eben so, und setzt die Operation, so lange Reste entstehen, welche größer als die Einheit sind, fort, so muß man offenbar dahin gelangen, daß der anfängliche Bruch, er werde allgemein mit $\frac{z}{n}$ bezeichnet, die Gestalt

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cdots\cfrac{1}{t+\cfrac{1}{u}}}}}$$

annimmt, worin a, b, c, . . . t, u die successiven Quotienten sind, welche bei der jedesmaligen Division durch den Zähler erscheinen.

Ein Bruch von dieser Form, worin hierdurch $\frac{z}{n}$ ver-

wandelt ist, wird ein **Kettenbruch** oder ein **continuirlicher Bruch** genannt. Die einzelnen Brüche $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ u. s. w. heißen **Glieder** desselben, und die Größen, a, b, c u. s. w. mögen, der Kürze halber, schlechthin die **Quotienten** genannt werden.

Anmerkung. Wenn ein ächter Bruch so beschaffen ist, daß die Division seines Nenners durch den Zähler eine ganze Zahl ohne Rest giebt, so wäre die Operation der Verwandlung schon damit geschlossen, und man könnte in diesem Falle keinen Kettenbruch hervorbringen; oder dieser hätte nur ein Glied und dürfte wohl nur uneigentlich ein Kettenbruch genannt werden.

§. 445.

Wäre $\frac{z}{n}$ ein unächter Bruch, so könnte, nachdem er in eine gemischte Zahl $g + \frac{z'}{n'}$ umgesetzt ist, mit dem der entstehenden ganzen Zahl beizufügenden ächten Bruche wie vorhin verfahren werden, so daß man unter ähnlicher Bezeichnung

$$\frac{z}{n} = g + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cdots \cfrac{1}{u}}}$$

erhielte, also der unächte Bruch in eine ganze Zahl nebst angehängtem Kettenbruche verwandelt wäre.

Beispiele. 1) Es sey der Bruch $\frac{211}{567}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln. Man verfahre wie bei der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maaßes zwischen 211 und 567 (§. 90) und merke die successiven Quotienten an. Bei der Ausführung könnte

man, um Ordnung und Uebersicht zu erhalten, das Rechnungs-Schema etwa so aufstellen:

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Quotienten} & 2 & 1 & 2 & 5 & 13 & \\ & 567 : & 211 : & 145 : & 66 : & 13 : & 1 \\ \text{Reste} & 145 & 66 & 13 & 1 & & \end{array}$$

Man hat daher:

$$\frac{211}{567} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{13}}}}}.$$

2) Wenn $\frac{1983}{364}$ zur Verwandlung in einen Kettenbruch gegeben ist, so wird zunächst dieser unächte Bruch durch die gemischte Zahl $5 + \frac{163}{364}$ ausgedrückt, und nun $\frac{163}{364}$ verwandelt, wodurch folgendes Schema entsteht;

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 3 & 2 & 5 & \\ 364 : & 163 : & 38 : & 11 : & 5 : & 1 \\ 38 & 11 & 5 & 1 & & \end{array}$$

daher ist:

$$\frac{1983}{364} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}}}}.$$

Anmerkung. Um sich von dem Verlaufe und der Richtigkeit der angezeigten Operation zur leichtern Einsicht des im §. 444 ausgesprochenen allgemeinen Satzes zu überzeugen, mögen die einzelnen Momente der Verwandlung beim ersten Beispiele dargestellt werden.

Es ist zuerst $\frac{211}{567} = \cfrac{1}{2 + \frac{145}{211}}$;

dann

dann $\frac{145}{211} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{66}{145}}$, folglich

$$\frac{211}{567} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{66}{145}}}$$. Ferner

$\frac{66}{145} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{13}{66}}$; dies im letzten Werthe von $\frac{211}{567}$ für $\frac{66}{145}$ substituirend wird:

$$\frac{211}{567} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{13}{66}}}}$$. Endlich ist

$\frac{13}{66} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{13}}$. Wiederum substituirend, wird nun

$$\frac{211}{567} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{13}}}}}$$. Da in dem letzten Gliede der Zähler des Bruchs 1 ist, so war hiemit die Operation geschlossen.

§. 446.

Außer dieser Entstehung der Kettenbrüche durch Umformung eines gegebenen bestimmten Bruchs läßt sich noch eine andere darstellen, welche für deren Anwendung ebenfalls sehr wichtig wird. Wenn man nämlich den angenäherten Werth einer gewissen Größe A bestimmen will, und voraussetzt, daß die nächste ganze Zahl desselben anzugeben sey, z. B. g, so wird das noch Fehlende kleiner als die Einheit, also ein ächter Bruch seyn. Dieser möge unbestimmt durch

$\frac{1}{x}$ angedeutet werden; denn unter diese Form kann jeder ächte Bruch gebracht werden, wenn man sich unter x eine ganze Zahl, oder auch einen unächten Bruch vorstellt, weil das Umgekehrte eines solchen (die Einheit dividirt durch denselben) einen ächten Bruch giebt. Man darf also setzen: $A = g + \frac{1}{x}$. Nimmt man nun abermals an, daß die nächste ganze Zahl g', welche in x enthalten ist, zu bestimmen sey, und bezeichnet den Ueberschuß als ächten Bruch mit $\frac{1}{x'}$, so wird

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{g' + \frac{1}{x'}}, \text{ oder}$$

$$A = g + \frac{1}{g' + \frac{1}{x'}}.$$

Diese Bestimmung unter gleicher Bezeichnung fortsetzend, indem also g'' die nächste ganze Zahl in x', und $\frac{1}{x''}$ den noch fehlenden ächten Bruch bedeutet u. s. w., hat man

$$A = g + \frac{1}{g' + \frac{1}{g'' + \frac{1}{g'''}}} \text{ etc.};$$

wodurch der angenäherte Werth von A in einem Kettenbruche dargestellt ist. Es ist übrigens an sich klar, daß die erste ganze Zahl g auch gleich Null seyn könnte. Gestattet es die Natur der Größe A nicht, ihren Werth jemals ganz genau zu bestimmen, so werden auch die Glieder dieses Kettenbruchs ins

Unendliche fortgehen, oder er wird mit keinem als geschlossen angesehen werden dürfen.

Anmerkung. 1) Bei der Vergleichung dieser Art der Entstehung eines Kettenbruchs mit der im §. 444 angezeigten, wird man leicht die Uebereinstimmung dieser mit jener finden, so daß die letztere als die allgemeinere angesehen werden darf. Denn z. B. in dem Bruche $\frac{1983}{364}$ ist die ganze Zahl 5 enthalten; der überschüssige ächte Bruch $\frac{163}{364}$ kann durch $\frac{1}{\frac{364}{163}}$ angedeutet werden; in $\frac{364}{163}$ liegt die ganze Zahl 2 und der übrige ächte Bruch $\frac{38}{163}$ ist gleich $\frac{1}{\frac{163}{38}}$ u. s. w.; daher, wie vorhin, auch durch dies Raisonnement:

$$\frac{1983}{364} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}}}}$$

allmählig hervorgeht. Hier mußte sich, bei dem bestimmten Werthe der Größe $\frac{1983}{364}$, der Kettenbruch schließen.

Anmerkung. 2) Die allgemeinere Form eines Kettenbruchs könnte durch

$$a + \cfrac{b}{c + \cfrac{d}{e + \cfrac{f}{g}}} \text{ u. s. w.}$$

vorgestellt werden. Indem man aber Zähler und Nenner der einzelnen Glieder durch den Zähler dividirt, erhält man wiederum die vorige Gestalt, nämlich

$$a + \cfrac{1}{\left(\frac{c}{b}\right) + \cfrac{1}{\left(\frac{e}{d}\right) + \cfrac{1}{\left(\frac{g}{f}\right) + \text{rc.}}}}$$

worin dann nur die Quotienten für die einzelnen Glieder als Brüche erscheinen. Diese Zurückführung auf die erste Form zeigt, daß sie besonders wichtig wird. Für die Anwendung ist sie auch am nützlichsten; weshalb wir uns im Nachfolgenden ausschließlich darauf beschränken, die Quotienten als ganze Zahlen anzunehmen.

Es versteht sich von selbst, daß die Glieder eines Kettenbruchs auch negativ seyn können. Wenn negative Quotienten vorkommen, so multiplicirt man Zähler und Nenner des Gliedes mit — 1, um eine bequemere Form zu erhalten; so ist z. B.

$$a + \cfrac{1}{-b + \cfrac{1}{c \text{ rc.}}} = a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{c \text{ rc.}}}$$

Partialbrüche oder Näherungswerthe eines Kettenbruchs.

§. 447.

Behält man von einem Kettenbruche nur gewisse Glieder bei, d. h. bricht man die fortlaufende Reihe der Glieder an einer gewissen Stelle ab, (wie dies bei einem sich nicht schließenden Kettenbruche immer geschieht) so ist der darin enthaltene Werth dem des Kettenbruchs nicht genau gleich, wird ihm aber desto näher kommen, je mehr Glieder angenommen werden. Die aus einem und demselben Kettenbruche dadurch entstehenden Werthe, daß man von ihm eine verschiedene Anzahl Glieder vom ersten an beibehält, heißen Partialbrüche, oder auch Näherungswerthe desselben.

Von dem Kettenbruche

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}}$$ u. s. w.

ist also $\frac{1}{a}$ der erste,

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b}}$$ der zweite,

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}}$$ der dritte,

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}}$$ der vierte Partialbruch u. s. w.

§. 448.

Reducirt man auf bekannte Weise den Bruch $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b}}$, indem man Zähler und Nenner mit b multiplicirt, so wird daraus $\frac{b}{ab + 1}$. Eben so wird aus $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}}$, wenn man von unten anfangend die Reduction der Bruchsbrüche vornimmt, zunächst

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{c}{bc + 1}}$$, und dann

$\frac{bc+1}{abc+a+c}$. Ferner wird

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{d}{cd+1}}}$$

$$= \cfrac{1}{a+\cfrac{cd+1}{bcd+b+d}} = \frac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1}$$

Auf dieselbe Art könnte man verfahren, um bei noch mehr angenommenen Gliedern, die Partialbrüche in der Form eines gewöhnlichen Bruchs darzustellen. Es läßt sich aber leicht ein allgemeines Gesetz auffinden, nach welchem jeder Partialbruch aus den vorhergehenden und den bekannten successiv folgenden Quotienten, welche die Nenner der einzelnen Glieder sind, sogleich in reducirter Gestalt angegeben werden kann.

§. 449.

Durch unmittelbare Reduction ward nämlich im vorigen §. gefunden, daß des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cdots\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{l+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\text{etc.}}}}}}}}}$$

1ter Partialbruch $\frac{1}{a}$,

2ter = $\frac{b}{ab+1}$,

3ter = $\frac{bc+1}{abc+a+c} = \frac{bc+1}{(ab+1)c+a}$,

4ter = $\frac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1} =$

$$\frac{(bc+1)d+b}{(abc+c+a)d+ab+1}$$

ist. Man sieht hieraus, daß jeder folgende Partialbruch dadurch entsteht, daß man zum Zähler desselben: das Product des Zählers des ihm vorhergehenden in den neuen Quotienten, zu welchem Producte der Zähler des zweiten vorhergehenden Partialbruchs addirt ist, annimmt, und zu seinem Nenner, das Product des Nenners des vorhergehenden in den neuen Quotienten, zu welchem Producte der Nenner des zweiten vorhergehenden addirt ist. Unter dem neuen Quotienten ist aber der Nenner des, zur Hervorbringung eines folgenden Partialbruchs, noch aufzunehmenden Gliedes zu verstehen. Z. B. beim 3ten wird für die Kette noch das Glied $\frac{1}{c}$ aufgenommen, oder c ist der neue Quotient. Dieser Zusammenhang unter drei auf einander folgenden Partialbrüchen zeigt sich hier aus dem Anblicke des 3ten und 4ten, in der Gestalt, wie sie zuletzt geformt sind. Daß dasselbe Gesetz allgemein gilt, wie weit man auch in der Zahl der auf einander folgenden Partialbrüche gehen mag, kann folgendermaaßen dargethan werden.

§. 450.

Es ist dazu noch die Bemerkung nöthig, daß die Erklärung im §. 447 ergiebt: jeder folgende Partialbruch entsteht

aus dem nächst vorhergehenden, wenn man in diesen für den letzten Quotienten (den Nenner des letzten darin angenommenen Gliedes) eben diesen Quotienten plus dem neu aufzunehmenden Gliede setzt. Z. B. der dritte entsteht aus dem zweiten, wenn man darin für b setzt $b + \frac{1}{c}$; der vierte aus dem dritten, wenn im letztern für c gesetzt wird $c + \frac{1}{d}$ u. s. w. Nun soll obiges Gesetz durch den unbestimmten Fortschritt bewiesen werden, d. h. wir wollen zeigen, daß wenn ein der Zahl nach unbestimmter Partialbruch (z. B. der $(n-1)^{te}$) aus den beiden ihm vorhergehenden auf die angezeigte Weise entsteht, so wird es ebenfalls der darauf folgende, (der n^{te}). Es mögen zu dem Ende $\frac{K}{K'}$, $\frac{L}{L'}$ und $\frac{M}{M'}$ drei auf einander folgende Partialbrüche vorstellen, und k, l und m die Nenner der Glieder seyn, womit der Kettenbruch für sie resp. geschlossen war. Angenommen, daß $\frac{M}{M'} = \frac{Lm + K}{L'm + K'}$ sey, also dieser Partialbruch aus den beiden ihm vorhergehenden, nach der aufgestellten Regel gebildet wäre. Um aus demselben den nächstfolgenden zu machen, muß darin, der obigen Bemerkung zufolge, für m gesetzt werden $m + \frac{1}{n}$, indem nämlich $\frac{1}{n}$ das für den neuen Partialbruch vom Kettenbruche noch aufzunehmende Glied sey. Man erhält also $\frac{L\left(m + \frac{1}{n}\right) + K}{L'\left(m + \frac{1}{n}\right) + K'}$, oder, Zähler und Nenner mit n multiplicirend, $\frac{Lmn + L + Kn}{L'mn + L' + K'n} = \frac{(Lm + K)n + L}{(L'm + K')n + L'}$. Dieser Ausdruck ist aber aus den beiden vorhergehenden Par-

tialbrüchen offenbar wiederum nach dem Gesetze geformt, dessen allgemeine Gültigkeit bewiesen werden sollte, und da dies für den 3ten und 4ten Partialbruch wirklich nachgewiesen war, so muß es auch für den 5ten, 6ten u. s. w. unbestimmt fort gelten.

§. 451.

Nimmt man für den Partialbruch welcher dem ersten vorhergeht, den Hülfsbruch $\frac{0}{1}$ an, so kann auch schon der zweite aus diesem und dem ersten, $\frac{1}{a}$, nach der bewiesenen Regel gebildet werden, er wird dadurch nämlich: $\frac{1 \cdot b + 0}{a \cdot b + 1}$ $= \frac{b}{ab + 1}$, wie sich sein Werth im §. 449 gleichfalls fand. Da nun der erste Partialbruch eine einfache Form hat, so gehen die successiv folgenden auf sehr bequeme Weise hervor. Z. B. die Partialbrüche des im §. 445 hervorgebrachten Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{13}}}}}$$

sind

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{16}{43},\ \frac{211}{567}.$$

Der 5te oder letzte Partialbruch mußte hier, wo sich der Kettenbruch schließt, wieder dem Bruche gleich werden, aus dessen Verwandlung dieser entstand. — Verlangt man die Näherungswerthe einer Größe, welche aus einer ganzen Zahl nebst angehängtem Kettenbruche besteht, so muß jedem

Partialbruche des letztern noch jene ganze Zahl beigefügt werden. Z. B. für

$$5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}}}}$$

sind die Partialbrüche des Kettenbruchs $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{13}{29}, \frac{30}{67}, \frac{163}{364}$; daher in diesem Falle die eigentlichen Näherungswerthe

$$5\tfrac{1}{2},\ 5\tfrac{4}{9} \text{ u. s. w. } 5\tfrac{163}{364}, \text{ oder } \tfrac{11}{2}, \tfrac{49}{9} \text{ u. s. w. } \tfrac{1983}{364}.$$

Eigenschaften der Partialbrüche.

§. 452.

Die Partialbrüche eines Kettenbruchs haben mehrere merkwürdige Eigenschaften, welche für die Anwendung der continuirlichen Brüche wichtig werden.

Zuerst ist leicht zu sehen, daß wenn man von dem Kettenbruche

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}} \text{ ꝛc.}$$

nur das erste Glied $\frac{1}{a}$ beibehält, dieses größer als der wahre Werth des Kettenbruchs ist, weil man darin den dem Nenner a noch anzuhängenden Bruch weggelassen hat, durch Verkleinerung des Nenners aber der Werth des Bruchs vergrößert wird. Nimmt man aber zwei Glieder, also

$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}}$, so wird dieser Bruch *kleiner* als der wahre Werth des Kettenbruchs seyn; denn nun ist der Nenner $a + \frac{1}{b}$ größer als wenn der angehängte Bruch $\frac{1}{b}$ durch Vergrößerung seines Nenners b um $\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}$ ꝛc. verkleinert wäre; der Werth des Bruchs $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}}$ ist mithin kleiner als die Fortsetzung der Kette den ganzen Ausdruck macht. Bei drei Gliedern $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$ nimmt man in Beziehung auf die ganze Kette wiederum etwas zu *Großes*, weil man den Nenner des vorher bei zwei Gliedern erhaltenen Bruchs um weniger vergrößert, als die Fortsetzung der Kette vorschreibt (um $\frac{1}{c}$ anstatt um $\frac{1}{c+}$ ꝛc.) Da sich diese Betrachtung für jedes folgende mehr aufzunehmende Glied wiederholt, so findet man es in der Form des Kettenbruchs begründet, *daß die Partialbrüche abwechselnd größer und kleiner als der Werth des ganzen Kettenbruchs seyn müssen, und zwar so, daß die von ungerader Zahl allemal größer, die von gerader Zahl kleiner sind.*

Besteht aber der vollständige Werth einer Größe aus einer ganzen Zahl nebst angehängtem Kettenbruche, so würde die ganze Zahl allein geringer als diese seyn; durch Hinzu-

fügung des zu großen ersten Partialbruchs aber wieder zu groß werden, also auch in diesem Falle der vollständige erste Partialbruch oder Näherungswerth zu groß seyn u. s. w. Wollte man aber die ganze Zahl für sich als ersten Näherungswerth ansehen, so fände das umgekehrte Gesetz Statt, d. h. die ungeraden Näheruugswerthe würden nun kleiner, die geraden größer, als der wahre Werth der obigen Größe.

§. 453.

Eine nothwendige Folge aus dem eben abgeleiteten Satze ist, daß der Werth eines Kettenbruchs immer zwischen zwei zunächst auf einander folgenden Partialbrüchen liegen muß; denn der eine dieser beiden ist größer, der andere ist kleiner als jener Werth.

§. 454

Die Differenz zwischen irgend zwei auf einander folgenden Partialbrüchen, von welcher Zahl sie auch seyn mögen, ist immer ein Bruch, dessen Zähler ∓ 1, dessen Nenner das Product aus den Nennern jener beiden ist.

Es mögen, um dies zu beweisen,

$\frac{L}{L'}, \frac{M}{M'}, \frac{N}{N'}$ drei auf einander folgende Partialbrüche, ihrer Zahl nach unbestimmt, z. B. der $(n-2)^{te}$, $(n-1)^{te}$ und n^{te} seyn; so ist $\frac{N}{N'} = \frac{Mn+L}{M'n+L'}$, wenn nämlich n den n^{ten} Quotienten vorstellt. (§. 449.) Nun ist $\frac{L}{L'} - \frac{M}{M'} = \frac{LM'-ML'}{M'L'}$. Ferner $\frac{M}{M'} - \frac{N}{N'} = \frac{M}{M'} - \frac{Mn+L}{M'n+L'} = \frac{M(M'n+L')-M'(Mn+L)}{M'(M'n+L')}$.

Die Entwickelung des Zählers des letzten Bruchs giebt aber $MM'n + ML' - M'Mn - M'L$ d. h. $ML' - M'L$,

folglich ist $\frac{M}{M'} - \frac{N}{N'} = \frac{ML' - M'L}{M'N'}$. Die Differenzen zwischen dem $(n-2)^{ten}$ und $(n-1)^{ten}$ Partialbruch hat also mit der Differenz zwischen dem $(n-1)^{ten}$ und n^{ten} einen der Größe nach gleichen, dem Zeichen nach entgegengesetzten Zähler. Da dies für unbestimmte Rangzahlen der Partialbrüche gefunden ist, so gilt es für die Differenz jeder zwei einander folgenden; z. B. der Zähler einer solchen zwischen dem n^{ten} und $(n+1)^{ten}$ wird wieder dieselbe Größe, nur der zwischen dem $(n-1)^{ten}$ und n^{ten} entgegengesetzt u. s. w. Nun zeigt sich, daß die Differenz zwischen dem ersten und zweiten Partialbruche, nämlich

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{ab+1} = \frac{ab+1-b}{a(ab+1)} = \frac{1}{a(ab+1)},$$ in der That ein Bruch wird, dessen Zähler 1 ist, folglich ist die zwischen dem 2ten und 3ten ein Bruch, dessen Zähler -1 seyn muß u. s. w., woraus der aufgestellte Satz hervorgeht.

§. 455.

Zähler und Nenner jedes Partialbruchs sind Primzahlen unter sich. Denn, wenn $\frac{M}{M'}$ und $\frac{N}{N'}$ wiederum zwei benachbarte Partialbrüche vorstellen, so ist bewiesener Maaßen $MN' - M'N = \mp 1$. Hätten nun M und M' irgend einen gemeinschaftlichen Factor, außer der Einheit, so wäre sowohl MN' auch auch $M'N$ dadurch theilbar (§. 83. Nr. 3), folglich auch die Größe $MN' - M'N$. Dies geht aber nicht an, weil letztere gleich der Einheit ist. Auf gleiche Art ist der Satz für jeden andern Partialbruch zu beweisen; er gilt daher allgemein.

§. 456.

Der Unterschied zwischen der Größe, welche durch einen Kettenbruch ausgedrückt ist, und dem

Werthe irgend eines Partialbruchs von diesem, ist kleiner als die Einheit dividirt durch das Quadrat des Nenners eben dieses Partialbruchs.

Der wahre Werth des Kettenbruchs liegt nämlich, wie §. 453 gezeigt worden ist, allemal zwischen zwei benachbarten Partialbrüchen. Die Differenz zwischen ihm und einem gewissen Partialbruche $\frac{M}{M'}$ muß daher kleiner seyn als die, zwischen eben diesem Partialbruche und dem zunächst darauf folgenden $\frac{N}{N'}$. Letztere war aber $\frac{\pm 1}{M' \cdot N'}$; und da $N' > M'$, so ist $\frac{\pm 1}{M' \cdot N'} < \frac{\pm 1}{M'^2}$, um so mehr ist also die erstere kleiner als $\frac{1}{M'^2}$, welches zu beweisen war, und bei der Unbestimmtheit der Rangzahl des Partialbruchs $\frac{M}{M'}$ allgemein gelten muß.

§. 457.

Es giebt keinen Bruch, welcher seinem Werthe nach zwischen zwei benachbarten Partialbrüchen eines Kettenbruchs liegend, also größer als der kleinere und kleiner als der größere dieser beiden, durch einen kleinern Nenner als der dieser Partialbrüche ausgedrückt seyn könnte.

Es mögen $\frac{M}{M'}$ und $\frac{N}{N'}$ zwei einander folgende Partialbrüche und $\frac{x}{x'}$ einen Bruch vorstellen, welcher seiner Größe nach zwischen beiden liegt, dabei aber eine kleinere Zahl im Nenner haben solle als diese.

Es sey $\frac{N}{N'} > \frac{M}{M'}$, also $\frac{N M' - N M'}{M' N'} = \frac{+1}{M' N'}$.

Wenn nun $\frac{x}{x'} > \frac{M}{M'}$ und dabei $\frac{x}{x'} < \frac{N}{N'}$ seyn sollte, so

müßte auch $\frac{N}{N'} - \frac{x}{x'} < \frac{N}{N'} - \frac{M}{M'}$, also $\frac{Nx' - xN'}{N'x'} < \frac{1}{M'N'}$ werden. Da aber wegen der Annahme $x' < M'$, auch $N'x' < M'N'$ ist, so müßte um so mehr $Nx' - xN' < 1$ seyn. Weil N, N', x', x ganze Zahlen sind, so ist auch die Differenz $Nx' - xN'$ eine solche, die nur kleiner als 1 genannt werden dürfte, wenn sie Null wäre; oder es müßte dies in der Bedeutung genommen werden, daß sie negativ würde. Beide Annahmen führen aber auf einen Widerspruch mit der Voraussetzung. Nämlich wäre $Nx' - xN' = 0$, so folgte $\frac{N}{N'} = \frac{x}{x'}$; und wäre $Nx' - xN'$ negativ, so müßte $Nx' < xN'$ also $\frac{N}{N'} < \frac{x}{x'}$ werden.

Wollte man $\frac{M}{M'} > \frac{N}{N'}$ und $\frac{x}{x'}$ kleiner als den ersten und größer als den zweiten annehmen, so würde der Beweis auf dieselbe Art zu führen seyn, wobei man, um eine positive Differenz zu erhalten, wiederum den kleinern Partialbruch von dem größern abzöge u. s. w.

§. 458.

Da der wahre Werth des Kettenbruchs zwischen zwei benachbarten Partialbrüchen liegt (§. 453), so folgt aus dem letzten Satze, daß sich jeder Partialbruch demselben mehr nähert, als irgend ein anderer Bruch mit kleinerem Nenner.

§. 459.

Wenn $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'} \ldots \frac{T}{T'}, \frac{U}{U'}$ die Partialbrüche eines sich schließenden Kettenbruchs vorstellen, so ist der letzte $\frac{U}{U'}$ dem vollständigen Werthe z desselben gleich (§. 451). Setzt man voraus, daß das erste Glied der Kette, $\frac{1}{a}$, keine ganze Zahl sey, so ist $\frac{A}{A'} > \frac{B}{B'}$ u. s. w. (§. 452).

Man hat nun nach §. 454 folgende Beziehung:

$$\frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{A'B'}$$

$$\frac{B}{B'} - \frac{C}{C'} = \frac{-1}{B'C'}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{T}{T'} - \frac{U}{U'} = \frac{\mp 1}{T'U'}$$

Auf beiden Seiten addirend, folgt

$$\frac{A}{A'} - \frac{U}{U'} = \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} \cdots \mp \frac{1}{T'U'},$$

oder, weil $\frac{U}{U'} = z$ gesetzt werden darf,

$$z = \frac{A}{A'} - \frac{1}{A'B'} + \frac{1}{B'C'} \cdots \pm \frac{1}{T'U'}.$$

Dies stellt eine Reihe dar, durch welche man den wahren Werth des Kettenbruchs angeben kann, wenn man die successiven Quotienten kennt. Die Glieder derselben werden offenbar immer kleiner, weshalb sie zur annähernden Berechnung anwendbar ist, selbst wenn sie sich nicht schließt, welches eintreten würde, wenn die Glieder des Kettenbruchs ins Unendliche fortgingen. Daß sie aber alsdann auch gültig sey, folgt sehr leicht, indem man in diesem Falle z dem Partialbruche, womit man abbricht $\left(\frac{U}{U'}\right)$ annäherungsweise gleichsetzt.

Anwendung der Kettenbrüche.

§. 460.

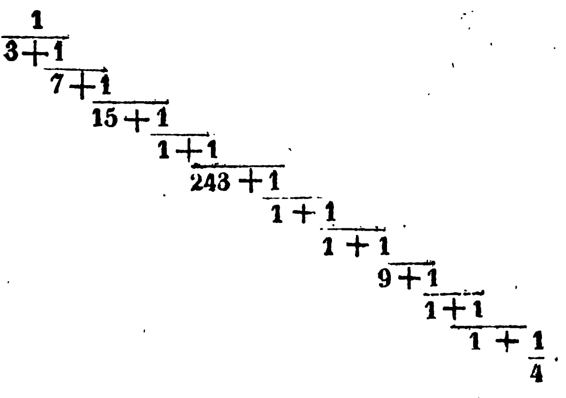
Die nächste Anwendung der Kettenbrüche betrifft die Abkürzung eines Bruchs, dessen Zähler und Nenner große Zahlen, und dabei Primzahlen unter sich sind. Man stellt ihn in einem Kettenbruche dar, und leitet dessen Partialbrüche ab, die man dann für ihn annäherungsweise an die Stelle setzen kann. Da in jedem Bruche zugleich das Verhältniß zweier Zahlen (des Zählers und Nenners desselben) angedeutet wird, so ist auch ein solches in jenen Partialbrüchen

durch

durch kleinere Zahlen annähernd ausgedrückt, d. h. man kann auf obige Art, wenn die Glieder eines Verhältnisses keine gemeinschaftliche Factoren haben, kleinere Zahlen mit einander vergleichen, welche beinahe in demselben Verhältnisse stehen.

§. 461.

Anmerk. Als ein Beispiel über diese Anwendung pflegt gewöhnlich das Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zu dessen Peripherie aufgestellt zu werden. Wäre die letztere für den Durchmesser = 1 bis auf 7 Decimalstellen berechnet, so ist sie bekanntlich 3,1415926. Jenes Verhältniß würde also durch den Bruch $\frac{1}{3,1415926}$ oder $\frac{10000000}{31415826}$ annäherungsweise dargestellt. Es werde nun verlangt, diesen Bruch durch kleinere Zahlen im Zähler und Nenner auszudrücken. Man sieht sogleich, daß beide sich durch 2 theilen lassen; es ist nämlich $\frac{10000000}{31415926} = \frac{5000000}{15707963}$. Da jetzt aber Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind, so stellen nur die Partialbrüche des Kettenbruchs, worin er zu verwandeln ist, Brüche dar, welche ihm beinahe gleich kommen, und dabei durch kleinere Zahlen ausgedrückt sind. Der aus $\frac{5000000}{15707963}$ entspringende Kettenbruch ist:



$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{243+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}}}}}}.$$

Die Partialbrüche desselben nach §. 449 der Reihe nach abgeleitet, sind:

$$\frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{106}{333}, \frac{113}{355}, \frac{27565}{86598}, \frac{27678}{86953}, \frac{55243}{173551},$$

$$\frac{524865}{1648912}, \frac{580108}{1822463}, \frac{1104973}{3471375} \text{ und } \frac{5000000}{15707963},$$

wovon der letztere dem gegebenen Bruche wieder gleich ist (§. 451). Jeder der übrigen stellt diesen aber in kleinern Zahlen annähernd dar. Wollte man für einen derselben, z. B. für $\frac{113}{355}$, untersuchen, wie viel er sich von dem wahren Werthe des in den Kettenbruch verwandelten Bruchs unterscheide, so dürfte man wenigstens sogleich behaupten daß dieser Unterschied geringer sey als $\frac{1}{(355)^2}$ oder $\frac{1}{126025}$ oder 0,000007 .... Noch genauer könnte man den Unterschied kleiner als $\frac{1}{355 \cdot 86598} = \frac{1}{30742290} = 0{,}00000003 \cdots$ angeben (§. 456). Hieraus sieht man, daß die Annahme des Bruchs $\frac{113}{355}$ anstatt $\frac{10000000}{31415926}$ keinen Einfluß auf die 7te Decimalstelle hätte, wenn beide in Decimalbrüche aufgelöst würden, d. h. daß sie sich erst in spätern Stellen von einander unterschieden.

§. 462.

Eine andere Anwendung der Kettenbrüche ist die zur annähernden Berechnung des Werths eines Irrational-Ausdrucks, und beruht auf der im §. 446 dargestellten Entstehung eines continuirlichen Bruchs. Es kommt hierbei also darauf an, diejenige Größe angeben zu können, welche der Irrationalzahl bis auf einem ächten Bruche gleichkommt. Dieser wird in der Form $\frac{1}{x}$ als der Unterschied zwischen dem wahren Werthe des Irrational-Ausdrucks und dem angenäherten dargestellt, aus der dadurch entstehenden Glei-

chung der Nenner x wiederum bis auf einen ächten Bruch, also in der nächsten ganzen Zahl, zu bestimmen gesucht, und für das Fehlende dieselbe Betrachtung wiederholt, und damit fortgefahren, bis eine hinreichende Anzahl Glieder des hervorgehenden Kettenbruchs berechnet sind.

Bei Ausziehung der Wurzeln höherer Grade, als der zweite, treten bei diesen Bestimmungen Schwierigkeiten ein, und die Anwendung der Kettenbrüche auf Irrational-Ausdrücke, worauf jene führen, würde die Auflösung der Gleichungen eines eben so hohen Grades als der Grad der auszuziehenden Wurzel ist, voraussetzen. Für die annähernde Berechnung der Quadratwurzel aus einer Zahl, lassen sich aber die Kettenbrüche leicht anwenden. Das dabei zu beobtende Verfahren wird aus folgendem Beispiele hervorgehen.

§. 463.

Beispiel.

Es sey $\sqrt{53}$ zu berechnen. Die nächsten ganzen Zahlen für die Irrational-Ausdrücke mögen mit g, g', g'' u. s. w; die fehlenden ächten Brüche mit $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x'}$, $\frac{1}{x''}$ u. s. w. bezeichnet werden.

Es ist nun zunächst $\sqrt{53} = 7 + \frac{1}{x}$, also $g = 7$. Ferner $\sqrt{53} - 7 = \frac{1}{x}$, folglich $x = \frac{1}{\sqrt{53}-7}$. Um die Irrationalität aus dem Nenner wegzuschaffen, multiplicire man Zähler und Nenner mit $\sqrt{53} + 7$, so wird

$$x = \frac{\sqrt{53}+7}{53-49} \quad (\text{§. } 335) \quad \text{oder} = \frac{7+\sqrt{53}}{4}.$$

Die nächste ganze Zahl dieses Werths ist 3, daher $g' = 3$; und man würde setzen

$$\frac{7+\sqrt{53}}{4} = 3 + \frac{1}{x'}; \text{ woraus}$$

$$\frac{\sqrt{53}-5}{4} = \frac{1}{x'} \text{ also } x' = \frac{4}{\sqrt{53}-5},$$

und Zähler und Nenner mit $\sqrt{53}+5$ multiplicirend,

$$x = \frac{4(\sqrt{53}+5)}{28} = \frac{5+\sqrt{53}}{7} \text{ folgt.}$$

Die hierin enthaltene ganze Zahl, also g'', ist 1. Daher ferner

$$\frac{5+\sqrt{53}}{7} = 1 + \frac{1}{x''}, \text{ mithin}$$

$$\frac{\sqrt{53}-2}{7} = \frac{1}{x''}, \text{ woraus}$$

$$x'' = \frac{7}{\sqrt{53}-2} = \frac{7(\sqrt{53}+2)}{49} = \frac{2+\sqrt{53}}{7}$$

folgt und $g''' = 1$ zu nehmen ist. Durch Fortsetzung dieser Betrachtung findet sich $g^{\text{IV}} = 3$, $g^{\text{V}} = 14$ u. s. w. Indem man nun diese Werthe für x, x', x'' u. s. w. allmälig substituirt, ergiebt sich

$$\sqrt{53} = 7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{14 + \text{u. s. w.}}}}}}$$

Die Partialbrüche dieses, der Zahl 7 angehängten, Kettenbruchs sind:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{7}{25}, \frac{100}{357} \dots$$

Dadurch, daß man jedem derselben die Zahl 7 beifügt, und sie dann in unächte Brüche verwandelt, entstehen endlich folgende Näherungswerthe

$$7, \frac{22}{3}, \frac{29}{4}, \frac{51}{7}, \frac{182}{25}, \frac{2599}{357} \dots,$$

welche dem Werthe von $\sqrt{53}$ in ihrem Fortschritte immer näher kommen.

Setzt man die Berechnung zur Auflösung einer Irrationalzahl, worauf die Ausziehung der Quadratwurzel führt, in einen Kettenbruch, weit genug fort, so wird man finden, daß die Quotienten desselben Perioden bilden, indem ein schon vorgekommener Werth für den der nächsten ganzen Zahl anzuhängenden ächten Bruch wiederkehren wird.

Anmerk. Ein vorzüglicher Werth der Kettenbrüche beruht in

ihrer Anwendung zur Auflösung der Gleichungen, wovon besonders die zur Bestimmung des angenäherten Werths der unbekannten Größe bei Gleichungen höherer Grade, und die auf unbestimmte Gleichungen practischen Nutzen haben.

Zweites Capitel.

Von der Auflösung unbestimmter Gleichungen des ersten Grades.

§. 464.

Wird eine Gleichung mit mehreren unbekannten Größen im Betreff einer derselben aufgelöst, so kann man noch für alle übrigen, durch welche diese dadurch ausgedrückt erscheint, unendlich viele verschiedene Werthe annehmen, weshalb auch die gedachte Auflösung jedesmal einen andern Werth für die erste unbekannte Größe herbeiführen muß. (Man vergl. ersten Abschn. §. 166.) Wenn also die Werthe der unbekannten Größen nicht durch gewisse Bedingungen eingeschränkt werden, so können unbestimmte Gleichungen keine weitere Untersuchungen anwendbar machen. Nimmt man aber an, daß jene Werthe nur rationale Zahlen seyn sollen, so lassen sie sich aus einer solchen Gleichung, — wenn diese sie überhaupt gestattet, — entweder in begrenzter Anzahl, oder wenigstens als Glieder gesetzmäßiger unendlicher Reihen angeben. Hierdurch machen Aufgaben, welche auf unbestimmte Gleichungen führen, oft bestimmte Antworten möglich.

Am wichtigsten und am meisten vorkommend ist der Fall, worin man für die Werthe der unbekannten Größen nur ganze Zahlen zuläßt. Auf diese Annahme wollen wir uns im Nachfolgenden beschränken. Die Auflösung unbe-

stimmter Gleichungen mit drei oder noch mehreren unbekannten Größen kommt ferner auf die einer solchen mit zweien zurück.

Anmerk. Es hängt von der Beschaffenheit der Gleichung ab, ob man für die eine unbekannte Größe auch den Werth Null setzen darf, wenn nämlich die andern dann noch den einer ganzen Zahl annehmen. Im Allgemeinen schließt man aber Null als Werth einer unbekannten Größe bei der Auflösung unbestimmter Gleichungen aus.

§. 465.

Die allgemeine Form einer Gleichung des ersten Grades mit zwei unbekannten Größen ist:

$$ax + by = c,$$

worin x und y die unbekannten, a, b und c bekannte Größen bedeuten.

Es ist im §. 167 bereits gezeigt, wie diese Form bei jeder gegebenen Gleichung, wenn sie anders von der betreffenden Art ist, durch Entwickeln und Ordnen derselben erreicht werden kann.

Da man auf bekannte Weise immer alle Divisoren, auch die etwaigen ganz bekannten, einer Gleichung wegschaffen kann, so dürfen wir hier voraussetzen, daß a, b und c ganze Zahlen vorstellen.

Indem man sich ferner auf die, ein für alle Male zum Grunde gelegte, Annahme stützt, daß die unbekannten Größen nur ganze Zahlen seyn sollen, darf man die Coefficienten a und b als Primzahlen unter sich ansehen. Denn, wären sie es nicht, so würde man die linke Seite der Gleichung durch ihr größtes gemeinschaftliches Maaß dividiren können; und auch die rechte Seite der Gleichung, nämlich die Größe c, müßte dann durch eben diese Zahl theilbar seyn, weil kein Bruch dem Inbegriffe ganzer Zahlen gleich

seyn kann. Beide Seiten würden mithin durch einerlei Zahl zu dividiren, und die Gleichung dadurch auf eine gleichgeltende zurückzuführen seyn, welche jener Voraussetzung entspricht.

§. 466.

Nimmt man in der Gleichung $ax + by = c$ den Coefficienten der einen unbekannten Größe, z. B. a, gleich der Einheit an, so daß sie in der Gestalt:

$$x + by = c$$

erscheint, so erhält man daraus

$$x = c - by.$$

Aus diesem Werthe lassen sich leicht die darin für x ausgedrückten möglichen ganzen Zahlen darstellen, da auch y eine solche seyn soll. Denn setzt man:

$y = 1, 2, 3, 4$ u. s. w. so wird

$x = c - b, c - 2b, c - 3b, c - 4b$ u. s. w.

die Werthe von x bilden, also die Glieder einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied $c - b$ und Denominator $-b$ ist.

Wollte man setzen:

$y = -1, -2, -3, -4$ u. s. w., so würde

$x = c + b, c + 2b, c + 3b, c + 4b$ u. s. w.

welche Werthe ebenfalls in einer arithmetischen Progression liegen, worin aber $c + b$ das erste Glied, und $+b$ der Denominator ist.

Die Werthe beider unbekannter Größen der obigen Gleichung sind demnach einem bestimmten Gesetze unterworfen, wenn es auch deren unendlich viele giebt.

Ist z. B. die Gleichung $x + 3y = 5$ gegeben, so wäre daraus $x = 5 - 3y$ und für

$y = 1, 2, 3, 4$ u. s. w. hätte man

$x = 2, -1, -4, -7$ u. s. w.

Anmerkung. Gewöhnlich schließt man die negativen Zahlen als Werthe für die unbekannten Größen aus, wodurch diese noch mehr beschränkt werden. In der Gleichung $x + by = c$ dürften die für y dann nur in der Progression 1, 2, 3, 4 u. s. w. genommen werden, und $x = c - by$ wäre der Bedingung unterworfen, daß wenn b in der Gleichung positiv ist, by nicht größer als c werde, wodurch rückwärts auch die Größe y bei ihrer Annahme begrenzt würde. In dem aufgestellten Beispiele wäre in diesem Falle nur der einzige Werth $y = 1$, welcher $x = 2$ giebt, statthaft; und die Aufgabe, welche auf diese Gleichung führte, würde eine völlig bestimmte seyn. Ist hingegen b in der Gleichung negativ, wäre z. B. $x - 3y = 5$, also $x = 5 + 3y$, so können beide unbekannte Größen unzählig viele positive Zahlenwerthe annehmen, nämlich für

$y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$ u. s. w. hätte man
$x = 8,\ 11,\ 14,\ 17$ u. s. w.

Die Aufgabe, deren Auflösung mittelst unbestimmter Gleichungen ausgeführt wird, schreibt es in der Natur der fraglichen Größen in den meisten Fällen schon vor, ob für diese negative Zahlen angenommen werden dürfen, oder nicht.

§. 467.

Noch allgemeiner kann die Gleichung $x + by = c$ durch $x \mp by = \mp c$ vorgestellt werden. Unter den verschiedenen gestatteten Annahmen der Größen b und c, bietet sie mehrere Folgerungen für die Werthe von x und y dar. Denn aus der Formel, die ihre Auflösung für x giebt, nämlich:

$$x = \mp c \pm by$$

kann man sogleich erkennen, welche Zahlenwerthe für y anzunehmen sind, damit auch x nur entsprechende positive oder negative Werthe bekomme. Ist z. B. $c = 0$, so wird

$$x = \pm by,$$

d. h. stets ein Vielfaches (negativ oder positiv) von b, indem für y alle ganze positive oder negative Zahlen gesetzt werden.

Ist $b = +1$, so wird $x = \mp c - y$,

woraus sich wiederum x und y als Glieder arithmetischer Progressionen ergeben, — u. dgl. m.

§. 468.

Da hiernach eine Gleichung mit zwei unbekannten Größen von der Beschaffenheit, daß der Coefficient der einen gleich der Einheit ist, die Bestimmung der möglichen Werthe beider, unter mehrerwähnter Einschränkung, sehr einfach mit sich bringt, so ist es wichtig, die allgemeinste Form jener Gleichungen: $ax + by = c$ allemal so zurückführen zu können, daß sie in einer solchen wie:

$$w + nt = m$$

auftritt, worin w und t neue unbekannte Größen sind, durch die x und y selbst wiederum auszudrücken sind; n und m aber beliebige ganze Zahlen bedeuten, und für m der Werth Null nicht ausgeschlossen ist.

§. 469.

Diese Zurückführung kann in der That folgendermaaßen geschehen. Man löse die Gleichung $ax + by = c$ für die unbekannte Größe, deren Coefficient der kleinere ist auf. Wenn z. B. $a < b$ ist, so bestimme man $x = \frac{c - by}{a}$ $= \frac{c}{a} - \frac{b}{a} y$. Durch wirkliche Division ziehe man die in diesen beiden Brüchen etwa enthaltenden Ganzen heraus. Es sey also $\frac{c}{a} = g + \frac{c'}{a}$ und $\frac{b}{a} = h + \frac{b'}{a}$, so wird

$$x = g - hy + \frac{c' - b'y}{a}.$$

Damit x eine ganze Zahl werde, muß man den Werth von y bestimmen, der $\frac{c' - b'y}{a}$ zu einer solchen macht. Man

setze daher: $\frac{c' - b'y}{a} = z$, so entsteht die neue Gleichung:

$$az + b'y = c', \text{ worin } b' < a \text{ ist.}$$

Man hat hieraus:

$$y = \frac{c' - az}{b'}.$$

Aus diesem Werthe kann man wiederum die etwaige ganze Zahl herausziehen, und mit dem übrig bleibenden Bruche wie vorhin bei x verfahren. Man sieht leicht, daß durch die Fortsetzung einer solchen Substitution, der Coefficient der neu einzuführenden unbekannten Größe, welcher das zweite Mal b' seyn würde, eine immer kleinere Zahl wird, weil er als der Rest einer gewissen Division erscheint, daß man also endlich dahin gelangen muß, daß er $= 1$ ist, wodurch aber die geforderte Reduction geschehen seyn wird. Ereignete sich dies z. B. bei der durch w bezeichneten unbekannten Größe, so daß etwa $w = m - nt$ zu setzen wäre, so hätte man die gewünschte Gleichung $w + nt = m$.

Endlich ist es zugleich klar, daß, weil die eintretenden unbekannten Größen nach und nach aus x und y hervorgehen, diese selbst durch eine rückwärts schreitende Substitution, eben so wie w zuletzt, durch t auszudrücken sind. Die Auflösung der Gleichung $w + nt = m$ nach den beiden vorhergehenden §§. giebt mithin auch die der gegebenen $ax + by = c$.

Beispiele. I. Die gegebene Gleichung sey:
$20x - 31y = 7$, so ist $x = \frac{31y + 7}{20} = y + \frac{11y + 7}{20}$.
Man setze: $\frac{11y + 7}{20} = z$, so hat man: $11y - 20z = -7$;
daraus ist $y = \frac{20z - 7}{11} = z + \frac{9z - 7}{11}$. Man setze also

ferner: $\frac{9z - 7}{11} = v$, wodurch die Gleichung $9z - 11v = 7$ entsteht. Sie giebt: $z = \frac{11v + 7}{9} = v + \frac{2v + 7}{9}$. Nun nehme man $\frac{2v + 7}{9} = w$ an, so ist $2v - 9w = -7$, woraus folgt: $v = \frac{9w - 7}{2} = 4w - 3 + \frac{w - 1}{2}$. Man setze also endlich: $\frac{w - 1}{2} = t$, so hat man daraus die Gleichung von der verlangten Form, nämlich:

$w - 2t = 1$. Sie giebt:

$w = 1 + 2t$.

Um nun auch x und y durch t auszudrücken, hat man:

$$v = \frac{9w - 7}{2} = 9t + 1;$$

$$z = \frac{11v + 7}{9} = 11t + 2;$$

$$y = \frac{20z - 7}{11} = 20t + 3;$$

$$x = \frac{31y + 7}{20} = 31t + 5.$$

Nimmt man demnach:

$t = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots$, so wird

$y = 3,\ 23,\ 43,\ 73 \ldots$ und

$x = 5,\ 36,\ 67,\ 98 \ldots$

Wenn man negative Zahlen zulassen darf, so setze man auch:

$t = -1,\ -2,\ -3 \ldots$ und erhält dadurch

$y = -17,\ -37,\ -57 \ldots$

$x = -26,\ -57,\ -88 \ldots$

II. Es sey die gegebene Gleichung:

$7x + 11y = 200$; so ist daraus $x = \frac{200 - 11y}{7} = 28 - y + \frac{4 - 4y}{7} = 28 - y + \frac{4(1 - y)}{7}$.

Man könnte nun zwar $\frac{4(1 - y)}{7} = z$ setzen, da aber, wenn

$\frac{4(1-y)}{7}$ eine ganze Zahl ist, auch $\frac{1-y}{7}$ eine solche seyn muß, so nimmt man kürzer sogleich $\frac{1-y}{7} = z$ an, woraus $y + 7z = 1$, als die geforderte Reduction, hervorgeht. Diese Gleichung giebt: $y = 1 - 7z$, folglich wird $x = \frac{200 - 11y}{7} = 27 + 11z$. Will man nur positive Zahlen für x und y haben, so darf man hier für z nur den Werth Null und solche negative Zahlen setzen, welche 27 noch größer als 11z machen. Man hat daher

für $z =$	0,	− 1,	− 2,
$y =$	1	8,	15,
$x =$	27,	16,	5.

Mehr Werthe sind für x und y in diesem Falle nicht zulässig. Können aber auch negative Zahlen für die unbekannten Größen angenommen werden, so hat man:

für $z =$	1,	2,	3,	4 ....
$y =$	− 6,	− 13,	− 20,	− 27 ....
$x =$	38,	49,	60,	71 ....

also wiederum eine unendliche Menge von Werthen, welche Glieder arithmetischer Progressionen werden.

§. 470.

Wenn in der Gleichung $ax + by = c$ die Größe $c = 0$ wäre, so hätte man $ax = -by$ also $x = -\frac{b}{a}y$. Diesen Bruch könnte man wie vorhin behandeln; indessen giebt die Bemerkung, daß, damit x eine ganze Zahl werde, a in y theilbar seyn müsse (weil b und a Primzahlen unter sich sind), hier sogleich die zulässigen Werthe für beide unbekannte Größen. Man darf nun nämlich für y bloß ein Vielfaches von a setzen. Z. B. aus $3x - 7y = 0$ folgt $x = \frac{7}{3}y$.

Man wird daher setzen:

$y = 3, \; 6, \; 9, \; 12 \ldots$ wodurch
$x = 7, \; 14, \; 21, \; 28 \ldots$ wird.

Hätte man dagegen in dem Werthe

$x = \frac{7}{3}\,y = 2y + \frac{1}{3}\,y$ zuerst $\frac{1}{3}\,y = z$ substituirt, so wäre $y = 3z$, also $x = \frac{7}{3}\,y = 7z$, und für z die Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. gesetzt, würde dieselben Werthe für x und y hervorbringen.

Anwendung der Kettenbrüche auf unbestimmte Gleichungen.

§. 471.

Durch Hülfe der Kettenbrüche können die unbestimmten Gleichungen noch auf eine andere Art aufgelöst werden, welche oft in der Anwendung kürzer ist. — Zur Ableitung des dabei zu beobachtenden Verfahrens muß folgender Satz vorhergehen.

Wenn für jede der beiden unbekannten Größen der Gleichung $ax - by = c$ ein Werth in ganzen Zahlen entdeckt wäre, der also, für sie substituirt, die Bedingung der Gleichung erfüllte, so könnte man daraus leicht alle übrigen möglichen Zahlenwerthe der unbekannten Größen darstellen. — Es sey z. B. $x = p$ und $y = q$, so daß: $ap - bq = c$ würde. Alsdann wird sowohl für x als für y derselbe Werth plus irgend einem Vielfachen des Coefficienten der andern unbekannten Größe der Gleichung ein Genüge leisten: nämlich für x der Werth $p + nb$, und für y der $q + na$ genommen werden dürfen, worin n jede beliebige ganze Zahl und auch Null seyn kann. Denn, substituirt man diese Werthe für x und y in der Gleichung, so entsteht: $a(p + nb) - b(q + na) = c$, indem durch Entwickelung und Weglassung der sich gegenseitig aufhebenden

Glieder anb und $-bna$, wiederum $ap-bq=c$ hervorgeht, wovon die wirkliche Gleichheit, wegen $x=p$ und $y=q$, angenommen war.

Da das zweite Glied einer Gleichung dadurch immer negativ vorgestellt werden kann, daß man, wenn es positiv ist, das doppelte Minuszeichen davor setzt, z. B. anstatt $ax+by=c$, schreibt: $ax-(-b)y=c$, so ist obiger Satz immer anwendbar; man wird nur, wenn b in der Gleichung positiv ist, in dem Ausdrucke des Werths für x das Entgegengesetzte von b zu setzen haben.

§. 472.

Es sey nun die Gleichung $ax-by=c$, worin a und b Primzahlen unter sich sind (§. 465), zur Auflösung gegeben. Man entwickele $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch, und leite dessen Näherungswerthe ab, wovon der letzte, derjenige, welcher dem wahren Werthe $\frac{a}{b}$ am nächsten kommt, mit $\frac{M}{M'}$ bezeichnet werde. Dann ist $\frac{a}{b}-\frac{M}{M'}=\frac{\mp 1}{bM'}$ (§. 454), folglich $aM'-bM=\mp 1$. Auf beiden Seiten multiplicire man mit $\mp c$, das Zeichen von c so wählend, daß die rechte Seite dieser neuen Gleichung dasselbe Zeichen bekommt, welches diese Größe in der gegebenen hat, so erhält man $a \cdot M'c - b \cdot Mc = c$, worin M'c und Mc, je nach den Umständen positiv oder negativ seyn können. Die völlige Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der angenommenen, wenn in letztere für x der Werth M'c und für y der Mc gesetzt wird, zeigt aber, daß gerade diese Werthe für die unbekannten Größen der Bedingung der Gleichung ein Genüge leisten, d. h. daß sie als richtige für jene genommen werden dürfen. Nach dem vorigen §. hat man alsdann in den Formen:

$x = M'c + nb$ und

$y = Mc + na$, worin n irgend eine ganze Zahl bedeutet, alle übrigen für die unbekannten Größen zulässigen Zahlenwerthe.

§. 473.

Für die bequemere Rechnung ist noch die Bemerkung nützlich, daß man in diesen Werthen für x und y die beständigen Größen M'c und Mc (die für jeden Werth von n dieselben bleiben) dergestalt bestimmmen kann, daß sie so klein als möglich werden. Nimmt man nämlich $n = n \mp k$, worin k natürlich wieder eine ganze Zahl seyn muß, so wird:

$x = M'c \mp bk + nb$, und

$y = Mc \mp ak + na$. Hierin muß nun k dem Zeichen und der Größe nach so gewählt werden, daß durch die Vereinigung von bk und ak respective mit M'c und Mc die, dann als beständige erscheinenden, Theile der Werthe für x und y kleinere Zahlen werden als zuerst M'c und Mc selbst waren. — Folgende Beispiele werden dies, so wie überhaupt die abgehandelte Anwendung der Kettenbrüche auf unbestimmte Gleichungen, noch mehr erläutern.

Beispiele.

I. Es sey die gegebene Gleichung:

$20x - 31y = 7.$

Man löse zuerst $\frac{20}{31}$ in einen Kettenbruch auf, so hat man:

$$\frac{20}{31} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

Der letzte Näherungswerth dieses Kettenbruchs, indem man sie sämmtlich nach der allgemeinen Regel des §. 449 und §. 451 ab-

leitet, wird $= \frac{9}{14}$, und es ist $\frac{20}{31} - \frac{9}{14} = \frac{1}{31 . 14}$, also $20 . 14 - 31 . 9 = 1$. Auf beiden Seiten mit + 7 multiplicirend, wird: $20 . (14 . 7) - 31 . (9 . 7) = 7$; daher nach §. 472:

$$x = 14 . 7 + 31n = 98 + 31n,$$
$$y = 9 . 7 + 20n = 63 + 20n.$$

Nimmt man jetzt $n = n - 3$, also das k der letzten Bemerkung $= - 3$ an, so wird:

$$x = 98 + 31 (n - 3) = 98 - 93 + 31n = 5 + 31n$$
$$y = 63 + 20 (n - 3) = 63 - 60 + 20n = 3 + 20n$$

Dies sind dieselben Formen, welche im §. 469 für die unbekannten Größen der nämlichen Gleichung gefunden waren, und sie werden, indem man hier für n, wie dort für t der Reihe nach 0, 1, 2, 3 u. s. w. oder auch − 1, − 2, − 3 u. s. w. setzt, dieselben Werthe für x und y geben.

II. Um die gegebene Gleichung $7x + 11y = 200$ aufzulösen, forme man sie zuerst so: $7x - (-11) y = 200$, und entwickele $\frac{7}{11}$ in den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}},$$

dessen letzter Näherungswerth $\frac{2}{3}$ ist. Dann wird $\frac{7}{11} - \frac{2}{3} = \frac{-1}{33}$, mithin $7 . 3 - 11 . 2 = - 1$. Man multiplicire auf beiden Seiten mit − 200, so erhält man:

$$7 . (-600) - 11 . (-400) = 200, \text{ oder}$$
$$7 . (-600) - (-11) . 400 = 200, \text{ folglich}$$
$$x = - 600 + (-11) n = - 600 - 11n$$
$$y = 400 + 7n.$$

Setzt man endlich $n = n - 57$, so wird

$$x = - 600 - 11n + 627 = 27 - 11n$$
$$y = 400 + 7n - 399 = 1 + 7n.$$

Diese Formen unterscheiden sich von den im §. 469 gefundenen nur darin, daß n das Entgegengesetzte von dem dortigen z bedeutet, und

und man würde, wenn bloß positive Zahlen für x und y genommen werden dürfen, hier für n Null, 1 und 2 zu setzen haben, um dieselben Werthe für x und y zu bekommen.

§. 474.

Zum Schlusse dieses Capitels mag noch gezeigt werden, wie die Auflösung einer unbestimmten Gleichung mit drei unbekannten Größen auf die bisher betrachteten Gleichungen zurückgeführt werden kann. Die allgemeine Form jener Gleichungen des ersten Grades ist: $ax + by + cz = d$, worin x, y und z unbekannte Größen, a, b und d aber ganze Zahlen vorstellen. Es folgt daraus: $ax + by = d - cz$. Man setze: $d - cz = w$, so kann w nur eine gewisse ganze Zahl seyn, weil d und c solche sind, und der Werth Null deshalb nicht vorauszusetzen ist, da sonst z eine bestimmte Zahl und sogleich aus der Gleichung zu entfernen wäre. Nun bestimme man zuvörderst nach §. 466 aus $d - cz = w$ die zulässigen Werthe von z, und die diesen entsprechenden für w. Die Werthe für x und y aber suche man aus der Gleichung $ax + by = w$, entweder durch Reduction oder durch Hülfe der Kettenbrüche. Diese erscheinen dann durch w ausgedrückt, wofür man die vorhin bestimmten Werthe, welche z zu einer ganzen Zahl machten, zu setzen hat, und dadurch auch die correspondirenden für x und y erhält. Weil auch die letztern ganze Zahlen werden sollen, so wird gewöhnlich die Annahme von w und rückwärts wieder die für z nun noch mehr beschränkt. Die dadurch hervortretenden Grenzen für w sind in wirklichen Fällen leicht zu bestimmen.

Beispiel. Es sey:

$$3x + 7y + 13z = 50.$$

Man setze $50 - 13z = w$.

Unter der Voraussetzung, daß nur positive ganze Zahlen für die drei unbekannten Größen angenommen werden sollen, muß $z < \frac{50}{13}$

d. h. kleiner als 4 seyn; es darf daher nur $z = 1, 2, 3$ gesetzt werden; die correspondirenden Werthe für w sind dann:

$$w = 37, 24, 11.$$

Aus $3x + 7y = w$, folgt:

$$x \quad \frac{w-7y}{3} \quad - 2y + \frac{w-y}{3}$$

Es sey also ferner:

$$\frac{w-y}{3} = v, \text{ woraus}$$

$$y = w - 3v, \text{ und daher}$$

$x = 7v - 2w$ wird. Wollte man nun $w = 11$ nehmen, so müßte, damit x und y positive ganze Zahlen werden, $7v > 22$ d. h. $v > \frac{22}{7}$ oder $3\frac{1}{7}$; und $3v < 11$ d. h. $v < \frac{11}{3}$ oder $3\frac{2}{3}$ werden, v dabei jedoch eine ganze Zahl seyn. Zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{2}{3}$ liegt aber keine ganze Zahl; und der Werth $w = 11$ und deßhalb der ihm entsprechende $z = 3$, ist mithin für die Aufgabe nicht gestattet. Setzt man ferner $w = 24$, wofür $z = 2$ war, so muß $7v > 48$ d. h. $v > \frac{48}{7}$ oder $6\frac{6}{7}$, und $3v < 24$ d. h. $v < 8$ seyn. Dann kann also v nur $= 7$ gewählt werden, und hierfür würde:

$$x = 49 - 48 = 1; \; y = 24 - 21 = 3.$$

Wird endlich $w = 37$ genommen, welches $z = 1$ gab, so muß:

$$7v > 74, \text{ d. h. } v > \frac{74}{7} \text{ oder } 10\frac{4}{7}, \text{ und}$$

$$3v < 37, \text{ d. h. } v < \frac{37}{3} \text{ oder } 12\frac{1}{3} \text{ seyn.}$$

In diesem Falle können daher für v die Zahlen 11 und 12 gesetzt werden, und es entsteht:

für $v = 11, 12.$
$x = 3, 10.$
$y = 4, 1.$

Die für die unbekannten Größen hier zulässigen Werthe sind demnach correspondirende unter einander gestellt:

$z = 1, 1, 2.$
$y = 4, 1, 3.$
$x = 3, 10, 1.$

Fünfter Abschnitt.

Anwendung der Gleichungen und Proportionen auf practische Rechnungsarten.

Erstes Capitel.

Von der Auflösung der Aufgaben vermittelst Gleichungen.

§. 475.

Wie durch die Auflösung von Gleichungen des ersten und zweiten Grades die Werthe der in ihnen vorkommenden unbekannten Größen gefunden werden, ist im Vorhergehenden gezeigt. — Sind also in einer Aufgabe die Gleichungen unmittelbar vorgeschrieben, aus welchen eine oder mehrere unbekannte Größen bestimmt werden sollen, so wird durch die Auflösung dieser Gleichungen zugleich die Auflösung der Aufgabe erledigt. — Bei den meisten Anwendungen der reinen Arithmetik auf practische Rechnungsgegenstände, kommt es aber zuerst darauf an, sich solche Gleichungen, aus gewissen Bedingungen und Beziehungen, welche in der Aufgabe über die unbekannten und bekannten Größen ausgesprochen werden, herzuleiten.

Sowohl die Mannigfaltigkeit der Verbindungen, in welchen unbekannte Größen mit bekannten stehen können, als auch die verschiedenen Arten sich darüber in Worten auszudrücken; ja die oft durch Nebenumstände entstellten oder versteckten fraglichen Beziehungen der unbekannten gegen bekannte Größen (wie unter andern in Exempelbüchern dieses Gegenstandes zur Uebung des eignen Nachdenkens die Aufgaben vorsätzlich verwickelt werden), machen es unmöglich die Herbeischaffung der erwähnten Gleichungen ganz bestimmten und festen Regeln zu unterwerfen. Daher fällt

diese Arbeit oft schwieriger aus, als die Auflösung der Gleichungen selbst, für welche, insofern sie einen gewissen Grad nicht übersteigen, die reine Arithmetik immer sicher leitende Regeln giebt.

Die wenigen allgemeinen Principien, welche sich über die Ableitung der Haupt- oder Fundamental-Gleichungen zur Auflösung einer Aufgabe geben lassen, sind im nachfolgenden §. enthalten. Ihre Anwendung auf bestimmte Fälle wird sie näher erläutern und dadurch verständlicher machen, als wenn man sie in völliger Allgemeinheit aufstellt.

§. 476.

Aus der gegebenen Aufgabe werden:

1) alle die auf die wesentlichen Beziehungen der unbekannten und bekannten Größen hinzielenden Begriffe aufgesucht, indem man die in ihr erwähnten Nebenumstände, welche ohne Einfluß darauf sind, bei Seite setzt.

Eine sorgfältige Betrachtung der in der Aufgabe ausgesprochenen Bedingungen ist dabei nothwendig, und muß die daraus zu entlehnenden Schlüsse in den gehörigen Zusammenhang bringen.

2) Die Forderungen, welche hiernach an die unbekannten Größen gemacht sind, werden arithmetisch dargestellt indem man für die unbekannten Größen einfache Zeichen (gewöhnlich die letzten Buchstaben des Alphabets) setzt; die bekannten Größen aber, — nachdem sie auf einerlei Benennung gebracht sind, oder bei einigen von ihrer Benennung abgesehen ist, weil sie nur nach ihren Größen-Verhältniß zu betrachten sind, — durch die ihnen entsprechenden bestimmten Zahlen ausdrückt, und die Verknüpfungen, in welchen beide Arten von Größen stehen sollen, durch die Zeichen der betreffenden arithmetischen Operationen andeutet.

Die Wahl einer bestimmten Einheit, welche den einzuführenden Zahlen zum Grunde liegt, erfordert bei der Anwendung dieser Regel, in einigen Fällen, besondere Aufmerksamkeit.

3) Die arithmetischen Verbindungen, in welche die vorkommenden bekannten und unbekannten Größen nach der vorigen Regel gesetzt sind, werden nun endlich zu einem oder mehreren aus zwei gleichen Theilen bestehenden Ausdrücken geordnet, wodurch alsdann eine oder mehrere Haupt-Gleichungen entstehen, deren Auflösung die Auflösung der Aufgabe zugleich herbeiführt.

§. 477.

Die aus einer Aufgabe hergeleiteten Gleichungen enthalten entweder eine oder mehrere unbekannte Größen. Im ersten Falle hat man nur eine dieser Gleichungen zu berücksichtigen, die andern sind überflüssig, sie entstehen gewöhnlich dann, wenn eine arithmetische Beziehung zwischen Größen verschieden angeordnet werden kann, so daß dieselbe Gleichung nur in veränderter Form dargestellt ist. Sind sie aber in der That von einander unabhängige Gleichungen, so müssen in der Aufgabe ganz verschiedene, für eine und dieselbe unbekannte Größe zu leistende, Bedingungen gemacht seyn; und wenn die Auflösung nicht dieselben Werthe für jene giebt, so erhält man einen sichern Beweis, daß sich die gemachten Bedingungen widersprechen, und nicht bei einerlei unbekanten Größen neben einander bestehen können.

§. 478.

Enthalten die Gleichungen mehrere unbekannte Größen, so ist es zur Bestimmung jeder derselben nothwendig, daß sich aus der Aufgabe eben so viele von einander unabhängige Gleichungen herleiten lassen, als verschiedene unbekannte Größen vorkommen. Leistet die Aufgabe dieser Be-

dingung kein Genüge, so ist sie eine unbestimmte Aufgabe, und es können dann oft viele verschiedene Werthe der unbekannten Größen angegeben werden, welche sämmtlich eine richtige Antwort auf die Fragen der Aufgabe sind. (Vergl. §. 464.)

§. 479.

Wenn die Gleichungen, welche aus einer Aufgabe abgeleitet sind, vom zweiten Grade werden, so lassen sich daraus gewöhnlich zwei verschiedene Werthe für die unbekannte Größe angeben (§§. 240. 245). Im Fall die Aufgabe bestimmt seyn soll, müssen dann gewisse Umstände derselben den richtigen von diesen beiden Werthen entscheiden.

Gleichungen höherer Grade als den zweiten, dürfen die Aufgaben, wenn ihre Auflösung durch elementarische Lehren geschehen soll, nicht liefern.

§. 480.

Für den Fall, in welchem die Aufgabe auf eine bestimmte Gleichung des ersten Grades führt, mögen folgende Exempel zur Erläuterung des Vorhergehenden dienen.

I. Man hat drei Fässer; wird das zweite aus dem ersten gefüllt, so bleibt im ersten $\frac{2}{3}$ übrig; füllt man das dritte aus dem ersten, so bleibt $\frac{1}{5}$ übrig; wird aber das erste aus den beiden andern gefüllt, so fehlen 8 Ohm. Wie viel Ohm hat jedes von diesen Fässern?

(Uflackers Exempelbuch für Anfänger und Liebhaber der Algebra rc. Braunschweig 1816. pag. 26.)

Man nenne die Anzahl Ohm, welche das erste Faß enthält x. Es ist klar, daß wenn man sie ausmittelt, aus den Bedingungen der Aufgabe auch die Mengen bekannt werden, welche die beiden andern Fässer enthalten.

Die Aufgabe fordert nämlich, daß bei dieser Annahme das zweite Faß $\frac{1}{3}x$, daß dritte $\frac{4}{5}x$ enthält und, daß die Summe dieser beiden so viel beträgt als $(x-8)$ Ohm; dies giebt die Gleichung:

$\frac{1}{3}x + \frac{4}{5}x = x - 8.$

Daraus findet sich $x = 36$.

Das erste Faß enthält mithin 36 Ohm; das zweite $\frac{1}{3} \cdot 36 = 12$ und das dritte $\frac{4}{9} \cdot 36 = 16$ Ohm.

II. Ein Wechsler hat zweierlei Münzen, von der ersten gelten 10 Stück einen Thaler, von der andern 20 Stück einen Thaler. Nun verlangt jemand 17 Stück für einen Thaler, wie viel bekömmt er von jeder Sorte?

(Uflackers Exempelbuch rc. pag. 29.)

Die Anzahl der Stücke, welche von der ersten Münzsorte zu nehmen sind, heiße x. Da nun zusammen 17 Stück genommen werden sollen, so ist klar, daß $(17 - x)$ die Anzahl der Stücke seyn muß, welche von der zweiten Münzsorte zu nehmen sind. Jedes Stück der ersten beträgt aber $\frac{1}{10}$ Thaler, jedes der zweiten $\frac{1}{20}$ Thaler und die Anzahl, welche von beiden genommen wird, soll 1 Thaler an Werth seyn. Man hat daher die Gleichung $\frac{1}{10}$ rthl. $\cdot x + \frac{1}{20}$ rthl. $\cdot (17 - x) = 1$ rthl. oder $\frac{x}{10} + \frac{17 - x}{20} = 1$, woraus sich $x = 3$, mithin $17 - x = 14$ findet; so daß man also 3 Stück der ersten und 14 Stück der zweiten Münzsorte für einen Thaler bekommen wird.

III. Ein unverheiratheter Liebhaber der Rechenkunst setzt seine Freunde zu Erben ein, also, daß A sollte 1 rthl. und $\frac{1}{9}$ des Uebrigen; B sollte 2 rthl. und $\frac{1}{9}$ des Uebrigen; C sollte 3 rthl. und $\frac{1}{9}$ des Uebrigen; und so der folgende immer 1 rthl. mehr und $\frac{1}{9}$ des Uebrigen haben. Es findet sich nun, daß er jedem seiner Freunde gleichviel zugedacht habe. Wie groß war das Vermächtniß, und wie viel sind der Erben gewesen?

(Uflackers Exempelbuch rc. pag. 31.)

Hier sind anscheinend zwei unbekannte Größen: die Anzahl der Erben und die Größe des Vermächtnisses. Man sieht jedoch leicht, daß durch die Größe des letztern, — sie werde x rthl. genannt — zugleich der Antheil des ersten Erben $\left(1 + \frac{x - 1}{9}\right)$ rthl., und dadurch auch die Anzahl der Erben bekannt wird; indem, weil sie alle gleichviel haben sollen, die Division des ganzen Vermächtniß durch jenen ersten Antheil, diese Anzahl hervorbringen wird. Hieraus kann man im Voraus schließen, daß, wenn jene Größen

richtig bestimmt seyn sollen, die erwähnte Division eine ganze Zahl zum Quotienten geben muß. Die Größe x wird nun durch Gleichsetzung der Antheile der beiden ersten Erben gefunden. Der zweite erhält nämlich, vermöge der Bedingung der Aufgabe:

$$2 \text{ rthl.} + \frac{x - \left(1 + \frac{x-1}{9} + 2\right)}{9} \text{ rthlr.}$$

Denn er soll außer 2 rthl. noch $\frac{1}{9}$ des Restes haben; dieser Rest aber ist das ganze Vermächtniß (x rthl.), von dem der Antheil des ersten Erben $\left(1 + \frac{x-1}{9}\right)$ rthl. und jene 2 rthl. selbst weggenommen sind. So entsteht die Gleichung:

$$1 \text{ rthl.} + \frac{x-1}{9} \text{ rthl.} = 2 \text{ rthl.} + \frac{x - \left(1 + \frac{x-1}{9} + 2\right)}{9} \text{ rthl.}$$

oder die

$$1 + \frac{x-1}{9} = 2 + \frac{x - \left(1 + \frac{x-1}{9} + 2\right)}{9},$$

oder zusammengezogen

$$\frac{x-1}{9} = 1 + \frac{x - \left(3 + \frac{x-1}{9}\right)}{9};$$

durch Multiplication mit 9 wird daraus:

$$x - 1 = 9 + x - \left(3 + \frac{x-1}{9}\right);$$

durch abermalige Multiplication mit 9 entsteht:

$$9x - 9 = 81 + 9x - (27 + x - 1),$$

zusammengezogen:

$$-90 = -27 - x + 1$$

und daraus $x = 64$, mithin

$$1 + \frac{x-1}{9} = 1 + \frac{63}{9} = 8 \text{ und } \frac{x}{8} = \frac{64}{8} = 8.$$

Das Vermächtniß bestand also aus 64 rthl., jeder Erbe bekam 8 rthl., und die Anzahl der Erben war 8.

Bei allen solchen Exempeln ist es dem Anfänger zu empfehlen, den für die unbekannte Größe gefundenen Werth in die auf-

gestellte Gleichung für jene zu setzen, und so die Probe zu machen, ob die in der Aufgabe ausgesprochenen Bedingungen dadurch erfüllt sind.

§. 481.

Von den Aufgaben, worin zwei Gleichungen des ersten Grades mit zwei unbekannten Größen gegeben werden, verdient folgende, wegen ihrer häufigen Anwendung, besonders hervorgehoben zu werden, nämlich:

aus der Summe zweier Größen und ihrer Differenz diese Größen selbst zu bestimmen.

Um diese Aufgabe allgemein zu lösen, nenne man die gegebene Summe der beiden unbekannten Größen, welche mit x und y bezeichnet werden mögen, S und ihre Differenz D, so hat man:

$$1)\ x + y = S,$$

$$2)\ x - y = D.$$

Durch die dritte Eliminations-Methode (§. 171.) erhält man daraus:

$$2x = S + D, \text{ mithin}$$

$$x = \frac{S + D}{2} = \frac{S}{2} + \frac{D}{2};$$

und

$$2y = S - D, \text{ mithin}$$

$$y = \frac{S - D}{2} = \frac{S}{2} - \frac{D}{2},$$

Es ergiebt sich hieraus als Antwort auf die in der Aufgabe liegende Frage, daß

die halbe Summe plus der halben Differenz gleich der einen; die halbe Summe minus der halben Differenz, gleich der andern unbekannten Größe ist.

Soll z. B. die Summe zweier Größen 12, ihre

Differenz 8 seyn, so sind sie selbst $\frac{12+8}{2} = 10$, und

$$\frac{12-8}{2} = 2.$$

§. 482.

Zu einem andern Beispiele einer Aufgabe mit zwei unbekannten Größen möge folgendes dienen:

A und B wollten ein Pferd kaufen, welches 100 rthl. kosten sollte. A sagte zu B: hätte ich doppelt so viel Geld als du, und dreimal so viel als ich habe, so würde ich gerade das Pferd bezahlen können. B erwiederte: hätte ich viermal so viel als du, und fünfmal so viel als ich habe, so würden mir noch 40 rthl. übrig bleiben, nachdem ich das Pferd bezahlt hätte.

Wie viel Geld hatte ein jeder von ihnen?

Die Anzahl der Thaler, welche A hatte, sey x, die des B y: so ist nach der Aeußerung des A:

1) $3x + 2y = 100$,

und nach der Aeußerung des B:

2) $4x + 5y = 140$.

Aus 1 ist $x = \frac{100-2y}{3}$. Diesen Werth für x in 2 substituirt, giebt: $4 \cdot \frac{100-2y}{3} + 5y = 140$.

Daraus findet sich $y = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$.

Durch Substitution dieses Werths für y in 1 erhält man die Gleichung: $3x + \frac{40}{7} = 100$, woraus sich $x = 31\frac{3}{7}$ ergiebt.

Das Geld des A muß mithin $31\frac{3}{7}$ rthl. und das des B $2\frac{6}{7}$ rthl. betragen haben.

§. 483.

Beispiel einer Aufgabe mit drei unbekannten Größen, die durch Gleichungen des ersten Grades gefunden werden:

Drei Räuber überfallen einen Reisenden und nehmen bei dessen Ausplünderung das Geld ohne Ordnung zu sich. Damit aber bei keinem demnächst der Neid über den andern rege werde, gleichen

sie ihre Beute gegenseitig aus. A, der bei weitem den größten Theil erhalten hat, giebt jedem der andern beiden so viel als dieser schon hat. Dasselbe thut darauf B und hierauf auch C. Nun findet sich, daß jeder 120 rthl. hat.

Wie viel hatte jeder anfänglich genommen?

Die Anzahl der Thaler, welche A anfänglich zu sich genommen, sey x; die des B sey y, und die des C sey z; so hatte, nachdem A so verfahren, wie angezeigt ist:

A den Betrag $x - y - z$;
B " " $2y$;
C " " $2z$.

Nachdem hierauf B mitgetheilt, hatte:

A den Betrag $2x - 2y - 2z$;
B " " $2y - (x - y - z + 2z) = 3y - x - z$;
C " " $4z$.

und nachdem endlich auch C so verfahren, hatte:

A den Betrag $4x - 4y - 4z$;
B " " $6y - 2x - 2z$;
C " " $4z - (2x - 2y - 2z + 3y - x - z) = 7z - x - y$.

Da jeder nun gleichviel und zwar 120 rthl. haben soll, so entstehen die Gleichungen:

1) $4x$ rthl. $-$ $4y$ rthl. $-$ $4z$ rthl. $=$ 120 rthl.
2) $6y$ rthl. $-$ $2x$ rthl. $-$ $2z$ rthl. $=$ 120 rthl.
3) $7z$ rthl. $-$ x rthl. $-$ y rthl. $=$ 120 rthl.

Indem von der Benennung abgesehen wird, und die ersten beiden zugleich abgekürzt werden, erscheinen diese Gleichungen als:

1) $x - y - z = 30$
2) $3y - x - z = 60$
3) $7z - x - y = 120$.

Durch Elimination von x aus den ersten beiden, erhält man:

$2y - 2z = 90$, oder
4) $y - z = 45$.

Durch Elimination von x aus 2 und 3 entsteht:

$8z - 4y = 60$, oder
5) $2z - y = 15$.

Aus 4 und 5 wird durch Addition $z = 60$;
ferner durch Elimination von z aus 4 und 5, $y = 105$;

und endlich durch Substitution der Werthe von z und y in 1,

$$x - 105 - 60 = 30, \text{ also}$$

$$x = 195.$$

Durch die Werthe von x, y und z ist aber die Frage der Aufgabe beantwortet.

§. 484.

Die in den drei letzten §§. gelösten Aufgaben enthielten zwar mehrere unbekannte Größen, weil sich daraus aber eben so viele von einander unabhängige Gleichungen aufstellen ließen, gaben sie für jede unbekannte Größe einen bestimmten Werth. (§. 478). —

Als Beispiele über unbestimmte Aufgaben, welche also verschiedene richtige Antworten auf die darin liegende Frage zulassen, mögen folgende zur Auflösung gebracht werden, worin sich aus den Bedingungen derselben nur eine Gleichung des ersten Grades mit zwei unbekannten Größen herleiten läßt.

I. Jemand kauft Pferde und Ochsen; zahlt für ein Pferd 31 ℔, für einen Ochsen aber 20 ℔, und es findet sich, daß die Ochsen insgesammt 7 ℔ mehr gekostet haben als die Pferde. Wie viel sind es Ochsen und Pferde gewesen?

(Uflackers Exempelbuch ꝛc. pag. 97).

die Anzahl der Ochsen sey $= x$; die der Pferde $= y$. Die Ochsen haben dann zusammen $x \cdot 20$ ℔ und die Pferde $y \cdot 31$ ℔ gekostet. Der Aufgabe gemäß muß nun

$x \cdot 20$ ℔ $= y \cdot 31$ ℔ $+ 7$ seyn. Man hat daher die Gleichung:

$20x = 31y + 7$. Die Auflösung derselben ist in den §§. 469. 473 als Beispiel gezeigt, und es fanden sich dort die Werthe:

$$y = 3, \ 23, \ 43, \ 63 \ldots\ldots$$
$$x = 5, \ 36, \ 67, \ 98 \ldots\ldots$$

Da x und y jede eine Anzahl bedeuten soll, so sind negative Zahlen als Werthe derselben nicht zulässig.

Die Anzahl der Pferde und die der Ochsen kann demnach so

angegeben werden, wie es die correspondirenden Werthe von y und x zeigen, und zwei zusammengehörige sind allemal eine richtige Antwort auf die vorgelegte Frage.

II. Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eier. A spricht: wenn ich die meinigen bei 8 zähle so bleiben 7 übrig; B spricht: wenn ich die meinigen bei 10 zähle, so bleiben auch 7 übrig. Wie viel konnte jede gehabt haben?

(Uflackers Exempelbuch rc. pag. 96).

Die Anzahl der Eier welche A hat, ist eine Zahl von der Form $8x + 7$; die der B von der Form $10y + 7$ worin x und y jede ganze positive Zahl bedeuten können, wenn zugleich die Bedingung erfüllt wird, daß

$$8x + 7 + 10y + 7 = 100 \text{ ist.}$$

Wenn man nun diese Gleichung, welche zusammengezogen als $8x + 10y = 86$ erscheint, nach §. 469 auflöst, so findet man $y = 3 - 4z$ und $x = 7 + 5z$. Da nun x und y nur ganze positive Zahlen seyn dürfen, so kann man z nur $= 0$ und $= -1$ nehmen, und man erhält die allein gültigen Werthe:

$$y = 3, \; 7$$
$$x = 7, \; 2. \text{ Es ist also}$$
$$8x + 7 = 63, \; 23 \text{ für A, und}$$
$$10y + 7 = 37, \; 77 \text{ für B.}$$

III. Es sollen 100 ₰ in Pistolen und Ducaten bezahlt, die Pistole zu 5 ₰ und der Ducaten zu 3 ₰ gerechnet werden. Wie viel kann man dazu von jeder dieser Münze nehmen?

(Uflackers Exempelbuch rc. pag. 97).

Indem die Anzahl der Pistolen x, und die der Ducaten y genannt wird, hat man hiernach aus der Gleichung:

$$5x + 3y = 100$$

die Werthe von x und y als ganze positive Zahlen zu bestimmen. Die Auflösung giebt: $x = 3w - 1$ und $y = 35 - 5w$, worin für w nur alle positiven Zahlen von 1 bis 6 incl. gesetzt werden dürfen, so daß man die geforderte Zahlung auf 6 verschiedene Arten machen kann. Man erhält daraus nämlich:

$x = 2, \; 5, \; 8, \; 11, \; 14, \; 17$ als die Anzahl der Pistolen, und
$y = 30, \; 25, \; 20, \; 15, \; 10, \; 5$ als die Anzahl der Ducaten.

§. 485.

Als ein Beispiel einer **bestimmten** Aufgabe, die auf eine Gleichung des zweiten Grades mit einer unbekannten Größe führt, mag endlich die Auflösung folgender Aufgabe gezeigt werden.

Zwei Hauptleute ließen unter ihre Soldaten ein jeder 1200 fl. Beute austheilen. Der letzte hatte 40 Mann weniger als der erste, und daher bekam auch jeder seiner Soldaten 5 fl. mehr als einer der ersten. Wie viel Soldaten hatte jeder Hauptmann, und was bekam ein jeder?

(**Uflackers** Exempelbuch rc. pag. 76).

Die Anzahl der Leute des ersten Hauptmanns sey $= x$, so bekommt jeder derselben $\frac{1200}{x}$ fl. zu seinem Antheile an der Beute. Da der zweite Hauptmann 40 Mann weniger hat, so ist deren Anzahl $x - 40$ und das, was jeder derselben von der Beute bekommt, $\frac{1200}{x-40}$ fl. Nun giebt die Bedingung der Aufgabe:

$$\frac{1200}{x}\text{ fl.} = \frac{1200}{x-40}\text{ fl.} - 5\text{ fl.},$$

oder man erhält die Gleichung:

$$\frac{1200}{x} = \frac{1200}{x-40} - 5;$$ welche entwickelt,

geordnet und reducirt, als

$$5x^2 - 200x = 48000,$$ oder

$$x^2 - 40x = 9600$$ erscheint.

Ihre Auflösung giebt:

$$x = 20 \pm \sqrt{10000},$$ d. h.

$$x = 20 \pm 100.$$

Es ist klar, daß der negative Werth der Wurzelausziehung hier gar nicht genommen werden darf, weil sonst $x = -80$ würde, die Anzahl der Soldaten aber nicht negativ seyn kann. Es muß also:

$$x = 20 + 100 = 120$$ werden.

Die Anzahl der Soldaten des ersten Hauptmanns ist demnach

120; die des zweiten 80; jeder des ersten hat $\frac{1200}{120}$ fl. = 10 fl., und jeder des zweiten $\frac{1200}{80}$ fl. = 15 fl. bekommen.

Zweites Capitel.

Anwendung der geometrischen Proportionen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

§. 486.

Die Erfahrung lehrt, daß sich unter einerlei Umständen die Wirkungen geometrisch zu einander verhalten, wie ihre Ursachen oder die wirkenden Kräfte. — Die dadurch begründeten in mannichfaltiger Gestalt erscheinenden Proportionen lassen sich, vermöge des Satzes, daß aus drei bekannten Gliedern einer Proportion das vierte unbekannte berechnet werden kann, zur Auflösung vieler Aufgaben anwenden. Alle solche Aufgaben können zwar nach dem vorigen Capitel auch durch Gleichungen aufgelöst werden, welches schon daraus folgt, daß jede Proportion eigentlich nichts anders als eine Gleichung ist; bei manchen ist es jedoch besonders bequem, die zu ihrer Auflösung erforderlichen Gleichungen in der Form von Proportionen aufzustellen, und die Rechnungsarten, worauf diese Methode führt, sind zugleich in der practischen Rechenkunst so allgemein üblich, und ihre Anwendungen auch wirklich so einfach und nützlich, daß sie wohl eine wissenschaftliche Untersuchung verdienen.

§. 487.

Um allgemein zu verfahren, müssen hierbei auch die Zeiten und die Geschwindigkeiten, in welchen gewisse Ursachen wirken, berücksichtigt werden. Denn wir wissen aus

Erfahrung, daß, wenn Zeit und Geschwindigkeit dieselben bleiben, sich die Ursachen wie die Wirkungen verhalten; wenn aber die Ursache dieselbe bleibt, die Wirkungen bei einerlei Zeit von der Geschwindigkeit, und bei einerlei Geschwindigkeit von der Zeit abhängen.

Bezeichnet man nun:

zwei verschieden wirkende Ursachen mit C und c;
die dabei angewandten Zeiten " T " t;
die Geschwindigkeiten " G " g;
die Wirkungen " E " e;

so erhält man in Beziehung auf den obigen Satz, die Proportionen:

1) $C : c = E : e$;
2) $T : t = E : e$;
3) $G : g = E : e$;

Aus Nr. 2 und Nr. 3 werden, wenn die Wirkungen in durchlaufenen Räumen bestehen, und man diese mit S und s bezeichnet, die:

4) $T : t = S : s$;
5) $G : g = S : s$.

Bei der letzten wird von keiner Ursache weiter die Rede seyn können, weil die Geschwindigkeiten schon als die Ursachen, daß Räume durchlaufen werden, anzusehen sind.

§. 488.

Wenn drei Glieder in einer dieser Proportionen gegeben werden, so findet sich ihr viertes Glied nach bekannten Regeln (§. 400), wobei man nur darauf zu sehen hat, daß die Glieder desselben Verhältnisses auf gleichbenannte Zahlen reducirt sind, und daß man für dasjenige Verhältniß der Proportion, deren beide Glieder bekannt sind, das ihm gleiche Verhältniß in unbenannten Zahlen substituirt (§. 397), wenn es nicht schon in der Aufgabe in solchen ausgedrückt ist.

ist. Man pflegt alsdann die Proportion so anzusetzen, daß das unbekannte Glied als das vierte derselben erscheint, welches übrigens nicht wesentlich ist.

§. 489.

Die Rechnungsart, durch die erwähnten Proportionen Aufgaben zu lösen, wird die Regel detri (regula de tribus terminis) genannt. Bei ihrer Anwendung treten unter andern folgende bestimmte Fälle dieser Proportionen ein:

1) die Menge der Arbeiter (C, c) verhalten sich wie die Größe oder Anzahl der Arbeiten (E, e);

die Menge der Waaren (E, e) wie die Preise derselben (C, c);

die Zinsen (E, e) wie die Capitalien (C, c) oder wie die Procente (C, c);

die Quantitäten der zu verzehrenden Lebensmittel (E, e) wie die Menge der sie Verzehrenden (C, c).

2) Die Größe der Zinsen (E, e) verhält sich wie die Zeiten (T, t), in welchen dieselben Capitalien auf einerlei Zinsfuß stehen;

die Arbeiten (E, e) wie die Zeiten (T, t), in welchen dieselben Arbeiter sie ausführen;

die Quantitäten der zu verzehrenden Lebensmittel (E, e) wie die Zeitdauer (T, t), in welcher eine gleiche Anzahl Menschen sie verzehren.

3) Bei gleichen Geschwindigkeiten verhalten sich die zurückgelegten Wege (S, s) wie die Zeiten (T, t).

Bei gleichen Zeiten verhalten sich die zurückgelegten Wege (S, s) wie die Geschwindigkeiten (G, g);

u. dergl. m.

Beispiel. Man erhalte von einer gewissen Waare 40 ℔

für 5 rthl., wie viel wird man von eben dieser Waare für 12 rthl. bekommen?

Die Anzahl der gesuchten Pfunde werde mit x bezeichnet, so hat man die Proportion:

5 rthl. : 12 rthl. = 40 ℔ : x ℔, oder die

5 : 12 = 40 ℔ : x ℔, und daraus

$$x \text{ ℔} = \frac{12}{5} \cdot 40 \text{ ℔} = 96 \text{ ℔}.$$

§. 490.

Wenn sowohl die Zeit als die Ursache zur Hervorbringung einer gewissen Wirkung verschieden angenommen werden, so tritt eine Zusammensetzung der vorhin aufgestellten Proportionen ein. Denn, man nehme an,

eine gewisse Ursache C wirke E in der Zeit T;
dieselbe Ursache C " E' " " " t;
eine andere Ursache c " e " " " t;

so hat man nach Nr. 1 und Nr. 2 des §. 487:

$E' : e = C : c$ und

$E : E' = T : t$

und daraus, wenn man die Verhältnisse $C : c$ und $T : t$ durch die entsprechenden unbenannten Zahlen ausdrückt, durch Zusammensetzung nach §. 419 die Proportion:

$E : e = CT : ct$; d. h.

die Wirkungen stehen in einem zusammengesetzten Verhältnisse aus Ursachen und Zeiten.

§. 491.

Diese Proportion zuerst auf den Fall angewandt, worin die Wirkungen E und e einander gleich werden, worin also von verschieden großen Ursachen in ungleicher Zeit einerlei Wirkungen hervorgebracht werden sollen, giebt:

$CT = ct$ (§. 402. Nr. 1);

und indem daraus selbst wieder eine Proportion gemacht wird, erhält man:

1) $C : c = t : T$ (§. 403);
darin muß den in ihr vorkommenden Größen ihre Benennungen wieder beigelegt gedacht werden; sie sagt alsdann:

Bei einerlei Wirkung stehen die Ursachen in dem umgekehrten Verhältnisse der Zeiten, in welchen sie diese Wirkung hervorbringen.

Besteht die Wirkung in einem durchlaufenen Raume, werden also die Ursachen (C, c) Geschwindigkeiten (G, g), so nimmt jene Proportion die Gestalt:

2) $G : g = t : T$ an, und drückt aus:
die Geschwindigkeiten verhalten sich, bei gleichem zu durchlaufenden Raume, umgekehrt wie bei Zeiten.

Anmerk. Daß man in einer Proportion, wie $C : c = T : t$ das eine Verhältniß gegen das andere umgekehrt nennt, hat seinen Grund darin, weil sie auch so geschrieben werden kann: $C : c = \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$; denn daraus wird durch die Veränderung des §. 405 wiederum $C : c = t : T$.

§. 492.

Sucht man aus drei gegebenen Gliedern der vorstehenden Proportionen das vierte Glied derselben, so heißt diese Rechnungsart die umgekehrte Regel detri (regula trium inversa) im Gegensatz der geraden Regel detri (regula trium directa) des §. 489.

Die Fälle, in welchen Proportionen der Art zur Auflösung einer Aufgabe dienen, sind unter andern:

1) dieselbe Arbeit erfordert in kürzerer Zeit mehr Arbeiter als in längerer Zeit;

eine gleiche Quantität Lebensmittel reicht für eine größere Anzahl der sie Verzehrenden nicht so lange hin, als für eine geringere Anzahl derselben.

2) Bei gleichen Wegen muß die Geschwindigkeit desto

größer seyn, je kürzer die Zeit ist, in der sie gemacht werden sollen, u. dgl. m.

Beispiel. Eine Arbeit wird in 3 Tagen von 20 Mann vollendet, wie viel Tage werden 6 Arbeiter dazu nöthig haben?

Hier würde man also, indem x die Anzahl der gesuchten Tage bedeuten, nach der Proportion Nr. 1. des vorigen §. setzen:

$$20 \text{ Mann} : 6 \text{ Mann} = x \text{ Tage} : 3 \text{ Tage}$$

und daraus zuerst die herleiten:

$$20 : 6 = x \text{ Tage} : 3 \text{ Tage},$$

woraus sich findet:

$$x \text{ Tage} = \frac{20}{6} \cdot 3 \text{ Tage} = 10 \text{ Tage}.$$

§. 493.

Aus der im §. 490 abgeleiteten Proportion

$$E : e = CT : ct,$$

oder aus der gleichgeltenden Gleichung

$$Ect = eCT$$

läßt sich durch Auflösung die unbekannte Wirkung (e) bei gegebener Ursache derselben (c) und bekannter Zeit (t), worin letztere wirkt, finden, wenn eine ähnliche Wirkung (E) bei bekannter Ursache (C) und Zeit (T) gleichfalls gegeben ist. Es ist daraus:

$$e = E \cdot \frac{ct}{CT}.$$

Bei der Anwendung dieser Formel werden die Größen t und T, so wie die c und C durch die unbenannten Zahlen ausgedrückt, welche denselben proportional sind, zu welchem Zwecke die correspondirenden t, T und die c, C vorher auf gleiche Benennung gebracht werden müssen. Die Benennung der Größe e wird dann mit der der Größe E übereinstimmen.

Aber nicht allein in diesem, sondern überhaupt in jedem Falle, worin fünf beliebige der in der Gleichung $Etc = eTC$ vorkommenden Größen bekannt sind, läßt sie sich zur Be-

stimmung der sechsten derselben anwenden, indem man darin die Benennung derjenigen Größe beibehält, welche mit der unbekannten correspondirt; die andern vier aber, wie vorhin, in unbenannte Zahlen verwandelt. Dies fließt daraus, daß sich die Größen-Verbindung in ihr nicht ändert, wenn man diese Gleichung, im Fall eine Zeit unbekannt wäre, aus den Proportionen:

$T : T' = E : e$ (§. 487) und

$T' : t = c : C$ (§. 491),

woraus durch Zusammensetzung folgt:

1) $T : t = Ec : eC$;

und wenn eine Ursache unbekannt wäre, aus den Proportionen:

$C : C' = E : e$ (§. 487) und

$C' : c = t : T$ (§. 491),

woraus durch Zusammensetzung folgt:

2) $C : c = Et : eT$

herleitet; denn die Proportionen 1. und 2. geben beide wieder

$$Ect = eCT.$$

§. 494.

Aus diesem Grunde ist es bequemer, die Gleichung $Etc = eTC$, auf die Auflösung solcher Aufgaben nach dem vorigen §. anzuwenden, welche die Zusammensetzung zweier Proportionen erfordern, als diese selbst erst herzuleiten und zusammenzusetzen, in welchem letztern Falle die Rechnungsart den Namen der Regel quinque (regula de quinque terminis) bekommt.

Beispiel. 21 Arbeiter verfertigen in 32 Tagen 80 Ellen Tuch; wie viel Arbeiter werden erfordert, damit in 12 Tagen 500 Ellen von ihnen geliefert werden? Hier setze man:

$C = 21$ Arbeiter

$T = 32$
$E = 80$
c = der gesuchten Anzahl Arbeiter
$t = 12$
$e = 500.$

Die Gleichung $Etc = eTC$ giebt $c = C \cdot \frac{eT}{Et}$;
mithin ist

$$c = 21 \cdot \frac{500 \cdot 32}{80 \cdot 12} \text{ Arbeiter},$$

d. h. $c = 350$ Arbeiter.

Anmerk. Nach der Regel quinque würde man bei dieser Aufgabe den Ansatz so machen:

21 Arbeiter : x Arbeiter = 80 : 500
x Arbeiter : y Arbeiter = 12 : 32,

daraus wird durch Zusammensetzung:

21 Arbeiter : y Arbeiter = 80 . 12 : 500 . 32,

mithin y Arbeiter $= \frac{500 \cdot 32}{80 \cdot 12} \cdot 21$ Arb. $= 350$ Arb. wie vorhin.

§. 495.

Die Verhältnisse der im Vorhergehenden betrachteten Proportionen, welche auf die allgemeine Formel $Ect = eCT$ führten, können selbst aus zwei oder mehreren Verhältnissen zusammengesetzt seyn. Jene Formel wird dadurch nicht weiter abgeändert werden, als daß diejenigen Größen derselben, welche die Glieder eines zusammengesetzten Verhältnisses waren, als Producte der gleichnamigen Glieder erscheinen, woraus sie zusammengesetzt sind.

Beispiel. Eine Mauer von 6 Fuß Höhe, 3 Fuß Dicke und 40 Fuß Länge, wird in einer Zeit von 4 Tagen durch 12 Arbeiter aufgeführt, wenn diese täglich 9 Stunden arbeiten; wie viel Arbeiter gehören dazu, um eine Mauer von 8 Fuß Höhe, 4 Fuß Dicke und 30 Fuß Länge in 8 Tagen zu vollenden, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten?

Hier wird:

$C = 12$ Arbeiter
$T = 4 . 9$
$E = 6 . 3 . 40$
$c =$ der gesuchten Anzahl Arbeiter
$t = 8 . 12$
$e = 8 . 4 . 30$.

In die Gleichung $c = C \cdot \frac{eT}{Et}$ diese Werthe substituirt, giebt:

$$c = \frac{12 . 8 . 4 . 30 . 4 . 9}{6 . 3 . 40 . 8 . 12} = 6 \text{ Arbeiter.}$$

Anmerk. Bedient man sich der Proportionen, und müssen alsdann zur Auflösung einer Aufgabe drei Proportionen zusammengesetzt werden, so bekommt die Rechnungsart den Namen der Regel septem. Man sieht aber, wie diese und ähnliche Rechnungsarten, wobei noch mehrere Proportionen in Betracht kommen, durch die obige allgemeine Formel entbehrt werden können.

§. 496.

Wenn Geschwindigkeiten G, g, Räume S, s und Zeiten T, t in den Aufgaben vorkommen, so sind die Geschwindigkeiten als die wirkenden Ursachen C, c und die Räume als ihre Wirkungen E, e anzusehen, daher dann die Formel $Ect = eCT$ die Gestalt:

$$Sgt = sGT$$

annimmt, wornach Aufgaben dieser Art zu lösen sind.

§. 497.

Die sogenannte Reductions-Rechnung beruht ebenfalls auf der Zusammensetzung mehrerer Proportionen, und macht eigentlich nur eine Anwendung des Satzes aus, durch welchen das Verhältniß zweier Größen durch zwischenliegende gegebene Verhältnisse gefunden wird (§§. 419. 420.). Ihre vorzüglichste Anwendung betrifft Münzen, Maaße u. s. w. durch andere auszudrücken, auf andere zu reduciren.

Beispiel 1. Die Caroline verhält sich zum holländ. Ducaten wie 2 : 1, der holländ. Ducaten zur Pistole wie 3 : 5, die Pistole zur Mark wie 13 : 1; was ist das Verhältniß der Caroline zur Mark?

Man hat also:

1 Carol. : 1 Duc. = 2 : 1
1 Duc. : 1 Pist. = 3 : 5
1 Pist. : 1 Mark = 13 : 1

Mithin nach §. 419:

1 Carol. : 1 Mark = 2 . 3 . 13 : 5, d. h. = 78 : 5.

Beispiel 2. Die Verhältnisse der angeführten Münzsorten mögen durch folgende Proportionen gegeben seyn:

3 Carol. : 2 Duc. = 3 : 1
4 Duc. : 3 Pist. = 4 : 5
5 Pist. : 2 Mark = 65 : 2

so ist nach §. 420

Carol. : Mark = 3 . 4 . 65 . 2 . 3 . 2 : 1 . 5 . 2 . 3 . 4 . 5

oder die gleichen Factoren auf der rechten Seite aufgehoben,

Carol. : Mark = 2 . 3 . 13 : 5
= 78 : 5.

Anmerk. Werden die zur Auflösung einer Aufgabe zusammenzusetzenden Proportionen als Producten-Gleichungen geschrieben (§. 419. Anmerk.), so pflegt diese Rechnungsart die Ketten-Rechnung genannt zu werden. In dem gegebenen Beispiele setzt man darnach:

1 Carol. = 2 Duc.
5 Duc. = 3 Pist.
1 Pist. = 13 Mark

und schließt daraus:

$$1 \text{ Carol.} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 13}{5} \text{ Mark} = \frac{78}{5} = 15\tfrac{3}{5} \text{ Mark.}$$

Auf dieselbe Art lassen sich Aufgaben, wie die folgende, sehr leicht lösen:

Wie viel Thaler Conv. M. betragen 13 Pfund Sterling, wenn 1 Pf. St. 6 rthl. Gold, und 10 rthl. Gold 11 rthl. Conv. M. ausmachen?

Man setze:

x rthl. Conv. M. = 13 Pf. St.
1 Pf. St. = 6 rthl. Gold
10 rthl. Gold = 11 rthl. Conv. M.

so ist $x = \frac{13 \cdot 6 \cdot 11}{10} = 85\frac{4}{5}$,

also $85\frac{4}{5}$ rthl. Conv. M. = 13 Pf. St.

§. 498.

Eine andere Anwendung der geometrischen Proportionen macht die Repartitions-Rechnung aus (zuweilen auch Gesellschafts-Rechnung genannt). Durch sie wird eine Größe in ungleiche Theile zerlegt, deren Verhältnisse zu einander gegeben sind. Es liegt ihr folgende allgemeine Regel zum Grunde:

die Summe gegebener Verhältnißzahlen verhält sich zu einer jeden derselben, wie die zu zerlegende Größe zu dem dieser Verhältnißzahl entsprechenden Theile.

Diese Regel zu beweisen, nehme man an, die Zahl A sey zuerst in zwei Theile zu zerlegen, die sich wie $m : n$ verhielten; so ist, wenn diese Theile x und y genannt werden,

$x : y = m : n$, mithin auch
$(x + y) : y = (m + n) : n$;

da aber die Summe der Theile x und y der Größe A gleich seyn müssen, so ist $x + y = A$; daher

$A : y = (m + n) : n$.

Eben so folgt aus der Proportion

$x : y = m : n$
$(x + y) : x = (m + n) : m$, oder
$A : x = (m + n) : m$.

Wenn aber ferner die Zahl A in drei Theile zerlegt werden soll, die sich wie $m : n : p$ verhalten, so hat man

1) $x : y = m : n$

$$2)\quad y : z = n : p$$
$$3)\quad x : z = m : p$$

und aus 1

$$(x + y) : y = (m + n) : n, \text{ oder}$$
$$(x + y) : (m + n) = y : n,$$

daher, weil aus 2 auch folgt

$$y : n = z : p,$$
$$(x + y) : (m + n) = z : p, \text{ und daraus}$$
$$(x + y + z) : z = (m + n + p) : p, \text{ oder}$$

da $x + y + z = A$ seyn muß,

$$A : z = (m + n + p) : p.$$

Auf dieselbe Art wird bewiesen

$$A : y = (m + n + p) : n \quad \text{und}$$
$$A : x = (m + n + p) : m.$$

Hieraus ergiebt sich leicht, wie der Beweis der aufgestellten Regel für die Eintheilung einer Zahl in mehr als drei Theile (in beliebig viele), deren Verhältnisse gegeben sind, zu führen seyn würde.

Beispiel 1. Die Zahl 140 soll in drei Theile zerlegt werden, die sich zu einander wie die Zahlen 4, 6, 7 verhalten.

Die hervorzubringenden Theile mögen durch x, y, z bezeichnet werden, so daß:

$$x : y : z = 4 : 6 : 7,$$

so hat man, da die Summe der Theilungszahlen 17 ist:

$$140 : x = 17 : 4, \text{ also } x = \frac{4 \cdot 140}{17} = 4 \cdot 8\tfrac{4}{17} = 32\tfrac{16}{17}.$$

$$140 : y = 17 : 6, \text{ also } y = \frac{6 \cdot 140}{17} = 6 \cdot 8\tfrac{4}{17} = 49\tfrac{7}{17}.$$

$$140 : z = 17 : 7, \text{ also } z = \frac{7 \cdot 140}{17} = 7 \cdot 8\tfrac{4}{17} = 57\tfrac{11}{17}.$$

Beispiel 2. Von einer Sorte Schießpulver, worin das Verhältniß der Bestandtheile: Salpeter, Kohle, Schwefel, das wie 76 : 15 : 9 ist, sollen 250 ℔ angefertigt werden; wie viel Pfunde Salpeter, Kohle und Schwefel werden dazu erfordert? Es bedeute

x die Anzahl Pfunde des Salpeters, y die der Kohle und z die des Schwefels, so hat man:

$$250 : x = 100 : 76 \text{ oder } 5 : x = 2 : 76$$
$$250 : y = 100 : 15 \text{ oder } 5 : y = 2 : 15$$
$$250 : z = 100 : 9 \text{ oder } 5 : y = 2 : 9$$

woraus x, y, z nach bekannten Regeln zu finden sind.

§. 499.

Endlich mag noch gezeigt werden, wie die geometrischen Proportionen auch in der Vermischungs-Rechnung angewandt werden. Durch diese Rechnungsart, welche auch den Namen der Alligations-Rechnung führt (oder auch der Allegations-Rechnung, vom Legiren der Metalle, wobei sie besonders Anwendung findet), soll bestimmt werden, wie viel von jeder genommen werden muß, um aus verschiedenen Massen eine Mischung hervorzubringen, die einen zwischen ihren Werthen liegenden Mittelwerth hat.

§. 500.

Die allgemeine Regel, welche bei zwei zu vermischenden Sachen, zur Auflösung dieser Aufgabe dient, wird folgendermaaßen abgeleitet. Es mag allgemein der Werth einer gewissen Masse durch a, der einer andern, welcher höher als a, durch b vorgestellt, und verlangt werden, aus beiden eine neue Masse zusammenzusetzen, die einen zwischen jenen beiden liegenden Mittelwerth c habe.

Die Menge, welche von der ersten Masse zu nehmen ist, verhalte sich zu der, welche von der zweiten zu nehmen ist, wie $x : y$. Daraus folgt zunächst, daß die Summe $x + y$ gleich der Menge der hervorzubringenden Mischung, mithin, wenn diese Menge nicht weiter bestimmt ist, einer unbestimmten Einheit gleich gesetzt werden kann. Man hat daher:

1) $x + y = 1$.

Ferner, wegen der Bedingung, daß die Menge von der

Masse, deren Werth a, und die Menge von der zweiten Masse, deren Werth b, zusammen den Werth c haben sollen:

$$2)\ a \cdot x + b \cdot y = c.$$

Aus diesen beiden Gleichungen würde es nun zur Auflösung der Aufgabe nur darauf ankommen, die Zahlen x und y zu bestimmen. Um sie aber auf Proportionen zurückzuführen, verfahre man so:

die erste Gleichung multiplicire man mit c, so entsteht

$cx + cy = c$; wird sie mit der zweiten verbunden, so erhält man:

$$cx + cy = ax + by,$$ und daraus

$$(c - a)\ x = (b - c)\ y,$$ mithin

$$x : y = (b - c) : (c - a).$$

Aus dieser Proportion ergiebt sich die Regel:

man subtrahire von dem gegebenen höhern Werthe den Mittelwerth, und von diesem den niedern Werth, so verhält sich die Menge, welche von der Masse des letztern Werths zu nehmen ist, zu der der andern, wie die erste dieser Differenzen zur zweiten.

Beispiel. Aus 16löthigem und 12löthigem Silber soll 15löthiges gemacht werden; nach welchem Verhältnisse sind die ersten beiden Sorten zu mischen?

Hier hat man: $x : y = (16 - 15) : (15 - 12) = 1 : 3$, d. h. vom 16löthigen Silber müssen 3 Theile und vom 12 löthigen 1 Theil genommen werden.

§. 501.

Ist die Menge oder das Gewicht der zusammenzusetzenden Masse bestimmt, so muß sie nach den, auf die angezeigte Art gefundenen Verhältnißzahlen durch die Repartitions-Rechnung eingetheilt werden, um die Mengen anzugeben, die von den einzelnen Massen zu nehmen sind.

Beispiel. Wie viel Mark müssen vom 16löthigen und wie viel vom 12löthigen genommen werden, um 8 Mark 15löthiges Silber hervorzubringen? Nachdem hier, wie vorhin, die Verhältnißzahlen 3 und 1 gefunden sind, setze man:

$$8 \text{ Mark} : x \text{ Mark} = 4 : 1,$$

woraus x 2 = wird.

Es müssen also 2 Mark des 12löthigen und 6 Mark des 16löthigen Silbers zu der geforderten Mischung genommen werden.

Anmerkung. Um die vorstehende Aufgabe durch den Ansatz einer Gleichung zu lösen, nenne man die Anzahl Mark, welche vom 12löthigen Silber zu nehmen sind x, so sind vom 16löthigen $(8 - x)$ Mark zu nehmen, und man hat die Gleichung

$$12 \cdot x + 16 \cdot (8 - x) = 15 \cdot 8,$$

woraus sich $x = 2$, wie vorhin, findet.

§. 502.

Wenn mehr als zwei Ingredienzen zu vermischen sind, um einen gewissen Mittelwerth hervorzubringen, so erhellet leicht, daß man noch eine willkührliche Bestimmung hinzufügen, und die Frage auf mehr als eine Art richtig beantworten kann, die Aufgabe also eine unbestimmte seyn wird.

Drittes Capitel.

Von der Zinsen-Berechnung.

§. 503.

Zinsen oder Interessen heißt das Geld, welches für die Benutzung einer fremden Summe Geldes (eines Capitals) nach einer festgesetzten Zeit, gewöhnlich nach Verlauf eines Jahrs, bezahlt wird.

Man unterscheidet einfache von zusammengesetzten Zinsen. Jene werden zur bestimmten Zeit für ein Capi-

tal berichtigt, oder wenn dies nicht geschieht, doch nicht als ein Capital angesehen, welches selbst wieder Zinsen trägt. Die zusammengesetzten Zinsen sind dagegen solche, die, wenn sie zahlbar sind, zum Capitale geschlagen, und in Verbindung mit ihm als ein dadurch vergrößertes Capital behandelt werden.

§. 504.

Die Menge der einfachen Zinsen, für welche ein Capital verliehen ist, pflegt nach der, die für 100 eines solchen Capitals jährlich zu entrichten seyn würde, nach Procenten, angegeben zu werden. Man nennt diese Größe den Zinsfuß. Bei seiner Angabe ist es gleichgültig, welches die Art des Capitals ist, oder es darf immer eine unbenannte Zahl unter ihm verstanden werden, die wir hier künftig mit p bezeichnen wollen.

Von den einfachen Zinsen.

§. 505.

Wenn ein gewisses Capital C nach dem Zinsfuße p verliehen ist und z seine jährlichen Zinsen bedeuten, so hat man zufolge der Erklärung des vorigen §. und nach §. 489 die Proportion:

$$100 : C = p : z, \text{ und daraus } z = \frac{p}{100} C;$$

eine Formel für die Berechnung der jährlichen Zinsen irgend eines Capitals, wenn die Größe der Procente bekannt ist.

Es ist klar, daß darin z die Benennung von C annehmen wird. Bei der Auflösung der Proportion

$$100 : C = p : z$$

muß aber C unbenannt und p und z von einerlei Benennung gedacht werden (§. 399).

§. 506.

Verlangt man die einfachen Zinsen eines Capitals nach

Verlauf mehrerer Jahre, so wird die Anzahl dieser Jahre in die Formel für z des vorigen §. als Factor hinzukommen. Soll demnach jetzt z die Zinsen des Capitals C zu p Procent nach n Jahren bedeuten, so erhält man die Formel

$$z = n \cdot \frac{p}{100} C .$$

Beispiel. Die Capitalien C und K wurden zu gleicher Zeit zinsbar belegt, C zu p und K zu q Procent. Beide Capitalien stehen n Jahre und bringen in dieser Zeit z Zinsen. Wie hoch hat das Capital K gestanden, oder wie groß ist q? (Uflacker's Exempelbuch ꝛc. pag. 6). Da die Zinsen beider Capitalien nach n Jahren z betragen sollen, so ist leicht zu sehen, daß man hier die Gleichung $z = \frac{np}{100} C + \frac{nq}{100} K$ erhält, die in Beziehung auf q aufgelöset werden muß. Sie giebt

$$q = \frac{\frac{100}{n} z - pC}{K} .$$

§. 507.

Nennt man das, was aus dem anfänglichen Capitale C durch Hinzufügung seiner einfachen Zinsen nach n Jahren geworden ist, K, so wird:

$$K = C + n \cdot \frac{p}{100} C, \text{ oder}$$

$$K = \left(1 + \frac{np}{100}\right) C .$$

Die Anwendung dieser allgemeinen Formel auf die Auflösung von Aufgaben, der sie zum Grunde liegt, indem man zur Zeit eine der in ihr vorkommenden Größen als unbekannt ansieht, ist an sich klar und sehr einfach.

Von den zusammengesetzten Zinsen.

§. 508.

In der zusammengesetzten Zins-Rechnung kommt es ins-

besondere darauf an, eine Formel für die Größe des Capitals abzuleiten, welches aus einem angenommenen dadurch entsteht, daß man dessen jährliche Zinsen zugleich selbst nach demselben Zinsfuß Zinsen tragen, und nun beide, Zinsen und Zinseszinsen, zu dem anfänglichen Capitale hinzukommen läßt.

Für das erste Jahr bleibt alsdann die Formel des vorigen §. dieselbe, d. h. wenn die Bezeichnung wie dort geschieht, so hat man am Ende des ersten Jahrs:

$$K = \left(1 + \frac{p}{100}\right) C .$$

Für das zweite Jahr kann man, eben weil der Zinsfuß unveränderlich seyn soll, nun aber jenes K und nicht C Zinsen trägt, schließen:

es verhält sich C zu dem, was am Ende des ersten Jahres aus ihm geworden ist, wie dieses sich zu dem verhält, was am Schlusse des zweiten Jahres das anfängliche Capital sammt Zinsen und Zinseszinsen betragen; also:

$$C : \left(1 + \frac{p}{100}\right) C = \left(1 + \frac{p}{100}\right) C : K,$$

$$\text{mithin } K = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 C,$$

wobei nun unter K die Größe desjenigen verstanden werden muß, was am Ende des zweiten Jahres aus C geworden ist.

Auf gleiche Art hat man für das dritte Jahr:

$$C : \left(1 + \frac{p}{100}\right) C = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 C : K,$$

(dem Capitale am Ende des dritten Jahrs)

$$\text{also } K = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 C \text{ u. s. w.}$$

allgemein für das nte Jahr

C :

$$C : \left(1 + \frac{p}{100}\right) C = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} : K$$

(dem Capitale am Ende des nten Jahres)

also $K = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n C$,

die allgemeine Formel für das Capital K, welches nach n Jahren durch Interusuriren aus dem Capitale C zu p Procent entstanden ist.

§. 509.

Aus der Formel des vorigen §.

$$1)\ K = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n C$$

ergeben sich durch Auflösung dieser Gleichung, in Beziehung auf jede darin vorkommende Größe, ferner folgende Formeln:

$$2)\ C = \frac{K}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}.$$

$$3)\ n = \frac{\log. K - \log. C}{\log. \left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

$$4)\ p = 100\left[\mathfrak{Z}\left(\frac{\log. K - \log. C}{n}\right) - 1\right].$$

(das Zeichen $\mathfrak{Z}$ soll die der Größe, vor welcher es steht, als Logarithme zugehörige Zahl bedeuten).

Auch die beiden ersten Formeln lassen sich bequem durch Logarithmen ausdrücken; es wird dann:

$$K = \mathfrak{Z}\left[\log. C + n \log. \left(1 + \frac{p}{100}\right)\right]$$

$$C = \mathfrak{Z}\left[\log. K - n \log. \left(1 + \frac{p}{100}\right)\right]$$

Die vier Formeln für K, C, n und p enthalten die

Auflösung vier verschiedener, hierher gehöriger Aufgaben. Durch die erste wird die Summe berechnet, welche nach gewissen Jahren aus einem Capitale, welches Zins auf Zins steht, geworden ist; durch die zweite wird rückwärts das anfängliche Capital gefunden, welches durch Interusurien nach einer Reihe von Jahren zu einem gewissen Capitale angewachsen seyn soll; durch die dritte wird die Anzahl der Jahre bestimmt, die erforderlich ist, damit ein Capital durch Interusurien einer gegebenen Summe gleich kommt; und durch die vierte endlich der Zinsfuß, nach dem ein Capital zu verleihen ist, damit es mit Zinsen und Zinseszinsen in bestimmten Jahren eine gewisse Größe erreicht.

§. 510.

Soll sich das anfängliche Capital zu p Procent in n Jahren durch Iterusurien vervielfachen, also K ein Vielfaches von C werden, welches durch mC angedeutet werden mag, wobei m eine beliebige ganze positive Zahl vorstelle, so hat man die Gleichung:

$$mC = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n C,$$

oder durch Weglassung des beiden Seiten gemeinschaftlichen Factors C

$$m = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ und}$$

$$\log. m = n \log. \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Diese Formel zeigt, daß, da C nicht mehr in ihr vorkommt, die Größe des Capitals keinen Einfluß darauf hat, daß dasselbe nach gewissen Jahren verdoppelt, verdreifacht oder beliebig vervielfacht werde.

Sie giebt ferner die Formeln:

$$1)\ n = \frac{\log.\ m}{\log.\ \left(1 + \frac{p}{100}\right)} \text{ und}$$

$$2)\ p = \left(3^{\frac{\log.\ m}{n}} - 1\right) .\ 100\ .$$

Durch die erste ist die Aufgabe zu lösen, wie lange ein Capital Zins auf Zins stehen müßte, damit es verdoppelt oder verdreifacht u. s. w. werde; und durch die zweite die, wie hoch die Procente seyn müßten, damit das Capital nach gegebener Zeit ein gewisses Vielfaches des anfänglichen werde.

§. 511.

Wenn außer den Zinsen jährlich eine gewisse Summe A zu einem Capitale hinzugelegt wird, so hat man, die übrige Bezeichnung beibehaltend, unter K nun aber dasjenige verstehend, welches durch Zins auf Zins und jene Zulage aus dem anfänglichen Capitale nach gewissen Jahren geworden ist,

$K = \left(1 + \frac{p}{100}\right) C + A$ am Ende des ersten Jahres;

$K = \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right) C + A\right] + A =$

$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 C + \left(1 + \frac{p}{100}\right) A + A$ am Ende des zweiten Jahrs;

$K = \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 C + \left(1 + \frac{p}{100}\right) A + A\right]$

$= \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 C + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 A + \left(1 + \frac{p}{100}\right) A + A,$

am Ende des dritten Jahrs und so fort, allgemein:

$$K = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n C + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} A$$

$$+ \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2} A + \cdots + \left(1 + \frac{p}{100}\right) A + A$$

am Ende des nten Jahrs.

Dieser Ausdruck für K bildet von seinem zweiten Gliede an eine geometrische Progression, deren Exponent $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ und worin die Anzahl der Glieder n ist. Wird sie nach bekannten Regeln wirklich summirt, so verwandelt sich die Formel für K in die:

$$K = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n C + \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n A - A}{\left(1 + \frac{p}{100}\right) - 1},$$

oder vereinfacht:

$$1)\ K = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n C + \frac{\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right] 100\ A}{p},$$

oder auch

$$= \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n (pC + 100\ A) - 100\ A}{p}.$$

Hieraus lassen sich noch folgende Formeln ableiten:

$$2)\ C = \frac{pK - \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right] 100\ A}{p \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}.$$

$$3)\ A = \frac{pK - p\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n C}{100\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right]}.$$

$$4)\ n = \frac{\log.\ (pK + 100A) - \log.\ (pC + 100A)}{\log.\ \left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

§. 512.

Wenn man anstatt jährlich A zu einem Capitale hinzuzufügen, eine solche Summe jährlich davon wegnimmt, die Zinsen aber stehen läßt, so hat man nur nöthig in die allgemeine Formel Nr. 1 des vorigen §. A negativ zu setzen, um in diesem Falle eine Formel für K, die Größe des Capitals am Schlusse des nten Jahrs, darzustellen. Es wird alsdann

$$K = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n C + \frac{\left[1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n\right] 100\ A}{p},$$

oder

$$= \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot (pC - 100\ A) + 100\ A}{p}.$$

Auf gleiche Art müßte man mit den übrigen Formeln des vorigen §. verfahren, um auch sie in dem Falle zu gebrauchen, worin jährlich vom Capitale ein Bestimmtes hinweggenommen wird.

§. 513.

Das Verhältniß des jährlichen Abganges A zu den Zinsen kann so beschaffen seyn, daß das Capital mit den Jahren größer, oder daß es desto kleiner wird, je mehr Jahre verfließen; ersteres wird eintreten, wenn die jährlichen Zinsen des anfänglichen Capitals größer als das A, und letzteres, wenn sie kleiner als das A sind. In diesem Falle muß es endlich zu Null werden, und man darf unter dieser Voraussetzung, die Gleichung:

$$\frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n (pC - 100\ A) + 100\ A}{p} = 0$$

aufstellen, aus welcher folgt:

$$1)\ n = \frac{\log. 100\, A - \log. (100\, A - pC)}{\log. \left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

In dieser Formel muß, damit sie keinen unmöglichen Werth für n giebt

$$100\, A > pC, \text{ d. h.}$$

$$A > \frac{p}{100}\, C \text{ seyn,}$$

weil sonst log. (100 A — pC) als Logarithme einer negativen Zahl nicht anzugeben seyn würde. Dieses entspricht auch dem, was schon für den Fall bemerkt ist, in welchem K gleich Null gesetzt werden dürfte, nämlich, daß die jährlichen Zinsen $\left(\frac{p}{100}\, C\right)$ kleiner als der jährliche Abgang A seyn müßten.

Aus der obigen Gleichung können ferner diese Formeln abgeleitet werden:

$$2)\ A = \frac{p \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n C}{100 \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right)}.$$

$$3)\ C = \frac{100\, A \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right)}{p \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}.$$

Beispiel 1. Ein Capital ist zu 4 Procent verliehen; die Zinsen werden jährlich zum Capital geschlagen, aber am Ende jeden Jahrs 100 ℔ zurückgezahlt und dadurch die Schuld nach 20 Jahren getilgt; wie groß war diese anfangs?

Hier ist also nach der Formel Nr. 3 die Größe C zu bestimmen. Wird zu dem Ende der Factor

$1 + \frac{p}{100}\Big)^n$ zuerst durch Logarithmen berechnet, so ist